Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Факультет непрерывного и дистанционного обучения

Кафедра информатики

Электронный учебно-методический комплекс

по дисциплине

**Методы численного анализа**

**Часть 2**

Для студентов специальности

**1-31 03 04 “Информатика“**

Минск 2011

# Общие сведения

## Сведения об ЭУМК

Данный комплекс специально разработан для студентов, обучающихся дистанционно. Целью его создания было сделать процесс изучения данной дисциплины максимально удобным и комфортным для студентов. Кроме того, обладание комплексом должно позволить студенту минимизировать свои непосредственные контакты с университетом и компьютером, что особенно удобно для иногородних студентов, а также тех, кто по различным причинам вынужден на долгое время уезжать из города. В принципе данный комплекс позволяет студенту изучить дисциплину и подготовиться к сдаче экзамена по ней “автономно”

Выше приведён перечень и описание составных частей данного комплекса. Они выполнены в виде гиперссылок и для перехода к нужной части требуется, удерживая клавишу “Ctrl”, щёлкнуть левой кнопкой мыши выбранную гиперссылку. Впрочем, поскольку весь комплекс представляет собой файл Microsoft Word, его можно просматривать в обычном режиме, а также полностью или частично печатать

**Составитель: Анисимов В.Я**., доцент**,** кафедры информатики Учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», кандидат ф.-м.н.

Рассмотрен и рекомендован к изданию на заседании кафедры информатики, протокол № \_\_ от \_\_.\_\_.2011.

## Методические рекомендации по изучению дисциплины

В соответствии с учебным планом студенты дистанционной формы обучения инженерных специальностей изучают курс «Методы численного анализа».

Учебным планом по данному курсу (часть 2) предусмотрено изучение теоретических вопросов, решение задач, выполнение двух контрольных работ, 2 ИПР с ИКТ . Изучение курса заканчивается сдачей экзамена. К сдаче экзамена студенты допускаются только при условии выполненных и защищенных контрольных работ, ИПР с ИКТ.

Рекомендуется изучать курс «Методы численного анализа» в соответствии с рабочей программой. Сначала необходимо ознакомиться с содержанием курса, затем изучить рекомендуемую литературу, обращая внимание на вопросы, выделенные в рабочей программе, после чего изучить теоретическое изложение курса по приведенным разделам, темам и вопросам, ответить на контрольные вопросы, выполнить задачи для решения (выполнения контрольных работ) в соответствии с заданием.

Так как теоретический материал излагается в строгой логической последовательности, рекомендуется изучать данную дисциплину, придерживаясь данной логики.

.

## Рабочая учебная программа

**Учреждение образования**

**«Белорусский государственный университет**

**информатики и радиоэлектроники»**

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета непрерывного и дистанционного обучения

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В. М. Бондарик

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2010 г.

Регистрационный № -\_\_\_/.

**Методы численного анализа**

**Часть 2**

Рабочая учебная программа

**для направления специальности 1-31 03 04**

**“Информатика“**

Факультет **непрерывного и дистанционного обучения**

Кафедра **информатики**

Курс **третий (семестр 7)**

**Контрольные работы** **2 работа**

**ИПР с ИКТ 2 работы**

**Часов часть 2 150часов**

Всего часов **305 часов**

Экзамен **3 курс**

Форма получения

высшего образования **дистанционная**

Минск 2011

Составили Минченко Л.И., Анисимов В.Я.

Учебная программа составлена на основе типовой учебной  *«Методы численного анализа*» для специальности 1-31 03 04 Информатика, утвержденной Министерством образования Республики Беларусь 14. 04. 2010 регистрационный № ТД-G.266/тип.

Рассмотрена и рекомендована к утверждению на заседании кафедры информатики

протокол № \_\_ от \_\_\_\_\_ \_\_\_\_

Заведующий кафедрой Минченко Л.И.

Одобрена и рекомендована к утверждению Научно-методической комиссией факультета компьютерных систем и сетей Учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

протокол № \_\_ от \_\_\_\_\_ \_\_\_

Председатель Лукашевич М.М.

СОГЛАСОВАНО

Начальник отделаметодического обеспечения

учебного процесса \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Ц. С. Шикова

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цель преподавания дисциплины. Дисциплина «Методы численного анализа» ставит своей целью подготовку студентов к разработке и применению с помощью ЭВМ вычислительных алгоритмов решения математических задач, возникающих в процессе математического моделирования.

Задачи изучения дисциплины. Изучение курса преследует цель сформировать у студентов навыки проведения вычислительного эксперимента. При изложении курса важно не только знакомить студентов с теоретическими характеристиками алгоритмов, но и указывать возможные пути улучшения последних при адаптации алгоритмов к решению конкретных задач математического моделирования.

В результате изучения дисциплины выпускник должен

знать:

-основные подходы к исследованию существующих и созданию новых алгоритмов решения указанных классов задач;

-методы решения численных уравнений и систем таких уравнений;

-основные понятия и методы решения задач теории приближения;

-методы теории квадратур;

-методы решения интегральных уравнений (в том числе в некорректной постановке);

-классические методы решения основных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений;

уметь:

-решать нелинейные уравнения и системы;

-приближать функции;

-решать основные задачи для функциональных уравнений;

-адаптировать известные алгоритмы к решению конкретных естественнонаучных задач на компьютере.

иметь представление о:

-выборе оптимальных методов решения вычислительных задач,

степени точности полученных численных решений,

сходимости и скорости сходимости алгоритмов,

устойчивости и сходимости разностных схем.

Перечень дисциплин, усвоение которых необходимо для изучения данной дисциплины

Дисциплина «Методы численного анализа» непосредственно связана и базируется на знании дисциплин «Математический анализ» и «Геометрия и алгебра», «Вычислительные методы алгебры». В свою очередь дисциплина «Методы численного анализа» служит основной базой для изучения дисциплин «Методы оптимизации» и «Исследование операций»..

2. ПЕРЕЧЕНЬ ТЕМ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ, ИХ СОДЕРЖАНИЕ И ОБЪЕМ В ЧАСАХ

Лабораторные работыучебным планом не предусмотрены

**Содержание дисциплины.**

1. Название тем теоретического материала, их содержание, рекомендуемый объем в часах

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ку  р  с | Название и содержание тем (*по типовой или учебной программе*) | Контрольная работа (номер и тема по п.2) | | Лабораторная работа с указанием вида 1  (по п.1) | Оснащение контрольных и лабораторных работ  (по п.5) | Литература (по п.4) | Рекомендуемый объем для изучения (в часах)2 | Форма контроля знаний (зачет по контрольной работе, тесты, защита лабораторной работы, защита курсового проекта, экзамен, зачет) |
| 1 | 2 | 3 | | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| **Часть 2** | | | | | | | | |
|  | ***1.Тема 7. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с частными производными***   * 1. Основные понятия теории разностных схем. Аппроксимация простейших дифференциальных операторов. Постановка разностной задачи.   1.2.Сходимость и устойчивость разностных схем. Математический аппарат теории разностных схем  1.3.Метод сеток решения граничных задач. Разрешимость системы разностных уравнений  1.4.Порядок аппроксимации разностной схемы | | КР №1 | ИПР с ИКТ№1 |  | 5.1.1  5.1.2  5.1.7 | 50 | Защита ИПР с ИКТ №1  Зачет по контрольной работе №2 |
|  | 2. Тема 8 Метод конечных элементов.2.1 Связь метод конечных разностей (МКР) и метода конечных элементов.2.2. Пример решения одномерной задачи2.3. Конечные элементы для многомерных областей2.4 Аппроксимирующие функции элементов2.5.. Объединение конечных элементов в ансамбль.2.6. Определение вектора узловых значений функций.2.7.Двухмерные финитные функции на треугольной сетке 2.8.. Решение двухмерной задачи Дирихле на треугольной сетке | | КР №2 |  |  |  | 50 | Зачет по контрольной работе №2 |
|  | **3.Тема 9..Численное решение интегральных уравнений.**  3.1.Метод механических квадратур решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.  3.2.Метод замены ядра на вырожденное.  3.3.Метод последовательных приближений решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.  3.4.Метод квадратур и метод последовательных приближений решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода.  3.5.Метод Галеркина решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода. | |  | ИПР с ИКТ№2 |  | **5.1.1**  **5.1.3**  **5.1.5**  **5.1.7**  **5.2.3** | 50 | Защита **ИПР с ИКТ** №2 |
|  |  | |  |  |  |  | 150 |  |

2.КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ, ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № пп | Тема | Характеристика | Рекомендуемый объем  в часах |
| 1. | . Метод конечных элементов. Вариационно-разностные схемы | Решение уравнений в частных производных методами конечных элементов | 4 |
| 2 | Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. | Разностная задача Дирихле для уравнения Лапласа и методы ее реализации. | 6 |

3.ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ, ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № пп | Название темы | Содержание | Объем в часах |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Шестой семестр | | | |
| 1. | Решение краевых задач методом разностных аппроксимаций. | Разностные схемы аппроксимаций.краевых задач методом | 4 |
| 2. | Решение задачи теплопроводности методом разностных аппроксимаций | Разностная задача для уравнения теплопроводности и методы ее реализации. | 4 |
| Итого: | | | 8 |

4.КУРСОВЫЕ РАБОТЫ (ПРОЕКТЫ), ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Курсовые работыучебным планом не предусмотрены

5. ЛИТЕРАТУРА

5.1.ОСНОВНАЯ

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
2. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. М.:, Наука, 1976, 1977.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М..: Наука, 1980.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. Наука, 1978.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. Наука, 1989.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином, 2004.
7. Минченко Л.И. Краткий курс численного анализа. Ч.1. Минск, БГУИР, 2006.

5.2.ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

1. Воеводин В.В. Численные методы линейной алгебры. М., 1977.
2. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики. Т.1-2. Вышейшая школа,1972, 1975.

6. ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРОГРАММ, НАГЛЯДНЫХ И ДРУГИХ ПОСОБИЙ, МЕТОДИЧЕСКИХ УКАЗАНИЙ И МАТЕРИАЛОВ И ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ОБУЧЕНИЯ

1. Минченко Л.И. Методические указания к лабораторным работам по курсу «Численные методы». Минск, 2001.
2. Программные пакеты по математике MATLAB, MATHCAD.
3. Электронный учебно-методический комплекс «Вычислительные методы алгебры». БГУИР, 2009.
4. Электронный учебно-методический комплекс «Методы численного анализа с вычислительными методами алгебры». БГУИР, 2006

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕС ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Название дисциплины,  с которой требуется согласование | Кафедра, обеспечивающая изучение этой дисциплины | Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой дисциплине | Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с ука- занием даты и но- мера протокола)1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Методы оптимизации | информатики | нет | согласовано |
| Исследование операций | информатики | нет | согласовано |

Зав. кафедрой информатики Минченко Л.И.

Теоретический раздел

# 1.Лекции

## ВВЕДЕНИЕ

Изучение курса «Методы численного анализа» предполагает освоение методов решения классических задач вычислительной математики с помощью компьютерной техники. В пособии изложены основные понятия, определения и алгоритмы методов численного анализа, рассмотрены основные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений Цель данного пособия: познакомить студентов с основными методами численного анализа, а также научить численному решению типичных задач вычислительной математики, достаточно сложных в вычислительном отношении и требующих применения ЭВМ.

**1. ТЕМА 7 РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

**1.1. Разностные аппроксимации дифференциальных краевых задач**

Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую функцию двух переменных *U=U(x,y)* в области *D* (см. рис.1.1), лежащей на плоскости *Oxy*. Необходимо аппроксимировать ее частные производные

*,* 

с помощью разностных производных.Разобьем область *D* с помощью вертикальных и горизонтальных прямых с шагом *h* и *l* соответственно. То есть, проведем прямые , где

.

Точки их пересечения образуют сетку на плоскости.

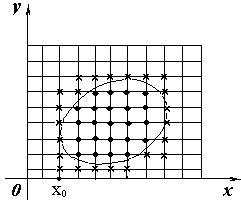


Рис. 1.1

Положим . Очевидно, возможны различные аппроксимации частных производных первого порядка:

*,*

*,*

**.

**

Их называют соответственно левой, правой и центральной разностными производными.Для вторых производных можно ввести аппроксимации

*,*

**

Пусть *U=U(x,y)*. Рассмотрим в области *D* уравнение в частных производных вида:

 (1.1)

где , , , , ,  − некоторые числовые коэффициенты, а *g(x,y)* − непрерывная в области *D*функция. Будем рассматривать уравнение (1.1) совместно с граничным условием

 (1.2)

где Г − контур, ограничивающий область *D*. Задачу (1.1), (1.2) будем называть дифференциальной краевой задачей и записывать коротко в виде

, (1.3)

где





 − неизвестная функция двух переменных.

Заменяя частные производные во внутренних узлах сетки их разностными аппроксимациями, получим следующую разностную схему дифференциального уравнения (1.1)

** (1.4)

где , .

Каждый узел , лежащий внутри области, будем называть внутренним и множество внутренних узлов обозначим . Узлы, лежащие на контуре  (если они есть) и узлы, окаймляющие контур  извне, будем называть граничными и обозначим их совокупность  (см. рис. 1.1).

Аппроксимируем граничные условия (1.2), полагая

 для , (1.5)

где  − значение функции  в точке на контуре , ближайшей к

узлу .

Таким образом, мы получили разностную краевую задачу (1.4), (1.5) , соответствующую дифференциальной краевой задаче (1.1), (1.2). Задачу (1.4), (1.5) называют также разностной схемой задачи (1.1), (1.2). В ней неизвестными являются всевозможные значения *Uij* , соответствующие внутренним узлам. Отметим, что по существу задача (1.4), (1.5) представляет собой систему линейных уравнений относительно неизвестных *Uij* . Обычно выбирают , где  − некоторая функция, или , где  − постоянная. Совокупность всех узлов обозначим



и будем называть сеткой в области *D*.

Функцию , определенную на сетке , будем называть сеточной. Т.е. это функция, которая ставит в соответствие каждому узлу  число .

Обозначим через  пространство всех сеточных функций на сетке  и введем в нем норму сеточной функции , полагая

,

где максимум ищется по всем узлам сетки .

Для краткости будем записывать разностную схему (1.4), (1.5) дифференциальной краевой задачи (1.1), (1.2) в виде операторного уравнения

, (1.6)

определенного на сетке , где





 − значение функции  в точке на контуре , ближайшей к узлу .

Для классификации разностных схем используется понятие шаблона. Шаблоном разностной схемы называется геометрическое место узлов сетки, участвующих в разностном уравнении (4) (см. рис.1.2). В зависимости от разностного уравнения шаблон может быть полным и неполным.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | j+1 |
| j |
| j-1 |
| i-1 | i | i+1 |  | |

Рис. 1.2. Полный шаблон

Возникают естественные вопросы: Существует ли решение краевой дифференциальной задачи (1.1), (1.2) и единственно ли оно, в случае, если существует? Существует ли решение разностной краевой разностной задачи (1.4), (1.5)? Если существует, будет ли оно единственным? Если разностная краевая задача имеет решение, будет ли оно сходится при *h* и*l* стремящихся к нулю? Если оно сходится, то сходится ли к решению дифференциальной краевой задачи (1.1), (1.2)? Если оно сходится, то с какой скоростью?Первый вопрос относится к теории дифференциальных уравнений. Ответы на остальные вопросы дает численный анализ.Рассмотрим отдельные примеры дифференциальных краевых задач в частных производных.

**1.2. Уравнение теплопроводности**

Рассмотрим одномерный однородный стержень длины *L.* Пусть  − температура в точке стержня с абсциссой *x* в момент времени *t*. Из математической физики известно, что распределение температуры в точках стержня в зависимости от времени описывается дифференциальным уравнением вида

*.*  (1.7)

Добавим к уравнению естественные граничные условия:

,

, (1.8)

,

которые описывают температуру, измеряемую на концах стержня и начальное распределение температуры в точках стержня.

Построим сетку ,  в области *D* (см. рис.1.3)

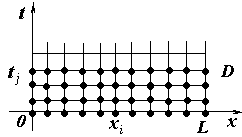


Рис. 1.3.

Заменим в дифференциальном уравнении значения частных производных во внутренних узлах их разностными аппроксимациями:

*,*

*.*

Получим разностное уравнение соответствующее исходному дифференциальному уравнению:

*,*

или

*.* (1.9)

Положим

, , .

Тогда граничные условия аппроксимируются следующим образом

, , . (1.10)

Зная значения  на нижнем (нулевом) слое и на границе слева и справа, вычисляем  для :



Таким образом, мы получили разностную краевую задачу (1.9), (1.10), которая очевидно имеет решение, причем единственное.

Рассматривая уравнение (1.9), построим его шаблон (см. рис. 1.4):



Рис. 1.4.

Вопрос сходимости к решению дифференциальной задачи зависит от соотношения между *l*и*h* в уравнении (1.7). Известно, что если

 т. е. ,

то имеет место сходимость.Рассмотрим подробнее ситуацию:

.

В этом случае уравнение (1.9) существенно упрощается и принимает вид:

.

На рис. 1.5 показан его шаблон.



Рис. 1.5.

Пусть  - функция двух переменных, график которой построен на основе аппроксимации плоскостями найденных при решении задачи (1.9), (1.10) значений . Можно показать, что при выполнении условияфункция будет сходиться к решению дифференциальной краевой задачи (7), (8) и скорость сходимости будет:

.

**1.3. Волновое уравнение**

Волновое уравнение − дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка, описывающее процесс распространения колебаний в некоторой среде. Мы будем рассматривать малые колебания натянутой струны, закрепленной в двух точках на оси Ох. Пусть *U(x, t)* – отклонение точки струны с абсциссой *х* в момент времени *t*от положения равновесия. Тогда величина *U(x, t)* описывается уравнением

(1.11)

Добавим к уравнению граничные условия:

, , , *,* (1.12)

которые отражают тот факт, что концы струны закреплены и дают величину начального отклонения точек струны от положения равновесия и их начальные скорости.

Построим сетку:

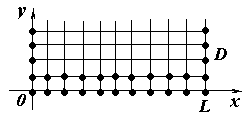


Рис. 1.6.

 , .

Заменим значения производных во внутренних узлах сетки их разностными аппроксимациями:

*,*

*.*

Получим разностное уравнение, отвечающее уравнению

**

или

*,*

где .

Запишем его окончательно в виде:

*.*  (1.13)

Данное разностное уравнение имеет шаблон, изображенный на рисунке 1.7.

Рис. 1.7.

Получим аппроксимацию граничных условий (1.12):

, ,  (1.14)

, , , (1.15)

а также



или

*.* (1.16)

Как легко видеть разностная схема (1.13)-(1.16) имеет единственное решение и легко реализуется последовательным вычислением значений сеточной функции, начиная с нулевого и первого слоя. Можно показать, что приближенное решение , полученное из решения разностной схемы (1.13)-(1.16), будет сходиться к решению исходной дифференциальной краевой задачи, если



причем со скоростью .

**1.4. Задача Дирихле для уравнения Лапласа**

Пусть *D* область на плоскости *Oxy* (см. рис.1.1), ограниченная замкнутым контуром *Г*. Рассмотрим в этой области однородное уравнение Лапласа



с граничными условиями

.

Данную краевую задачу называют задачей Дирихле для уравнения Лапласа. Поскольку переменные x и y имеет одинаковый характер, разобьем область с помощью вертикальных и горизонтальных прямых с одинаковым шагом *l=h.*

Для каждого внутреннего узла *(xi, yj)* составим разностное уравнение:

*,*  (1.17)

заменяя значения частных производных в дифференциальном уравнении их разностными аппроксимациями. Аппроксимируем граничные условия, полагая

 для ,

где - совокупность граничных узлов (напомним, что это узлы, лежащие на контуре  и узлы, окаймляющие контур  извне, см.рис.1.1),  − значение функции  в точке на контуре , ближайшей к узлу . Приводя подобные, получаем разностную схему

*,* (1.18)

(в граничных узлах). (1.19)

Полученную разностную схему будем рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных *Uij* во внутренних узлах. При этом линейная система является неоднородной, поскольку некоторые уравнения будут содержать кроме неизвестных еще и определенные значения в граничных узлах. Чтобы система система линейных уравнений (1.18), (1.19) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ей однородная система имела только нулевое решение. Но соответствующая однородная система линейных уравнений имеет вид

*,* (1.20)

**(в граничных узлах).

Допустим, что система (1.20) имеет ненулевое решение. Предположим, что хотя бы в некоторых узлах это решение принимает положительные значения, и положим

*,*

где максимум берется по всем внутренним узлам.

Если подставить *i*=*i0, j= j0*в уравнение (1.20), то максимальное значение ** равно среднему арифметическому значений нашего решения в соседних узлах. Но это возможно только в случае, когда значения в соседних узлах совпадают с максимальным значением *.* Подставимтеперьвуравнение (1.20)

*i*=*i0+1, j= j0 (i*=*i0, j= j0+1; i*=*i0 -1, j= j0; i*=*i0, j= j0 –1)*

и совершенно аналогично получим, что в соседних с данными узлами узлахрешение *Uij* должно принимать также максимальное значение. Поскольку через конечное число шагов мы придем к уравнению, в котором участвуют граничные узлы, получается, что и в граничных узлах значение решения уравнения (1.20) максимально и, следовательно, положительно. Последнее очевидно невозможно в виду нулевых граничных условий. Аналогично рассматривается и случай, когда решение уравнения (1.20) не положительно во всех узлах. Полученное противоречие говорит о том, что решение (1.20) должно быть нулевым. Следовательно, система (1.18),(1.19) имеет решение, причем единственное.

**1.5. Свойства разностных схем для уравнений с частными производными**

В области D , ограниченной контуром Г, рассмотрим дифференциальную краевую задачу

, (1.21)

где





 − неизвестная функция двух переменных.

Разобьем область *D* (см. рис. 1.1) с помощью вертикальных и горизонтальных прямых с шагом *h* и *l* соответственно. То есть, проведем прямые , где



.

Положим , где  − некоторая функция, или , где  − постоянная. Определим сетку *Dh* (совокупность внутренних и граничных узлов) и пространство сеточных функций на сетке  с нормой сеточной функции 

,

где максимум берется по всем узлам сетки .Для дифференциальной краевой задачи построим некоторую разностную схему

, (1.22)

где





 − значение функции  в точке на контуре , ближайшей к узлу .

Будем полагать далее, что

1. дифференциальная краевая задача (1.21) имеет решение , причем единственное;
2. разностная краевая задача (1.22) имеет единственное решение при любом выборе шага  меньшего некоторого значения .

Определим сеточную функцию , значения которой совпадают на сетке  со значениями решения  дифференциальной краевой задачи (1.21) в узлах сетки .

**Определение 1. будем говорить, что разностная схема (1.22) сходится на решении  дифференциальной краевой задачи (1.21), если**

** при ,**

**где  − решение разностной краевой задачи (1.22). При этом, если**

**,**

**где не зависящая от , то имеет место порядок сходимости .**

Введем пространство сеточных функций , элементами которого являются всевозможные сеточные функции , определенные на сетке . Норму в пространстве  определим как

.

Рассмотрим невязку

,

соответствующую решению  дифференциальной краевой задачи (1.21).

**Определение 2.Будем говорить, что разностная схема (1.22) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу (21) на ее решении , если**

** при .**

**При этом будем говорить, что имеет место порядок аппроксимации , если**

**,**

**где  не зависит от .**

По аналогии введем понятие устойчивости разностной схемы. (Отметим, что здесь мы имеем дело только с линейными дифференциальными операторами ).

**Определение 3. Разностная схема (1.22) называется устойчивой, если существует число  такое, что для любого  разностная краевая задача (1.22) имеет единственное решение при любой правой части , и это решение удовлетворяет условию**

**, (1.23)**

**где  не зависит от  и .**

**Теорема 1.** Пусть разностная схема (1.22) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу (1.21) с порядком аппроксимации  и разностная схема (1.22) устойчива. Тогда разностная схема (1.22) сходится на решении  дифференциальной краевой задачи (1.21) с порядком сходимости .

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1 предыдущего параграфа.

Теорема 1 представляет собой эффективное средство исследования сходимости разностных схем. Покажем это на примере задачи теплопроводности.

*Пример*.Рассмотрим задачу теплопроводности

, , ,

с граничными условиями

, , .

Введем сетку , определенную прямыми

; ,

где .

Составим разностную схему, соответствующую рассматриваемой дифференциальной краевой задаче в узлах сетки . Получим



или, полагая ,



откуда

.

Граничные условия будут иметь вид

, , ,

где , , .

Таким образом, мы имеем разностную схему

,

где





Покажем, что разностная схема сходится на решении  дифференциальной краевой задачи.

Порядок аппроксимации определить легко. Точность разностной аппроксимации производной  определяется , производной  − , граничные условия аппроксимируются точно. В итоге, разностная схема имеет порядок аппроксимации .

Покажем, что построенная разностная схема устойчива. Рассмотрим возмущенную краевую задачу



с произвольной правой частью



где , , ,  − произвольные сеточные функции, определенные на внутренних и граничных узлах сетки.

Надо показать, что возмущенная задача имеет

1. единственное решение ;
2. это решение удовлетворяет оценке

, (1.23)

где

, .

Существование решения и его единственность вытекают из того, что значения  на нулевом слое (при ) определяются граничными условиями, в первом слое () однозначно определяются из разностной схемы и т.д.

С другой стороны

.

Далее



Отсюда

.

Аналогично

,

… … … … … … … … … … … … … … … …

.

Поскольку

,

то

.

Таким образом, разностная схема устойчива и, следовательно, в силу теоремы 1 она сходится на решении  дифференциальной краевой задачи с порядком сходимости .

## 2.ТЕМА 8 МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее популярных методов решения краевых задач в системах автоматического проектирования (САПР). В математическом отношении метод относится к группе вариационно-разностных

### 2.1 Связь метод конечных разностей (МКР) и метода конечных элементов.

Сущность метода сеток состоит в аппроксимации искомой непрерывной функции совокупностью приближенных значений, рассчитанных в некоторых точках области – узлах. Совокупность узлов, соединенных определенным образом, образует сетку. Сетка, в свою очередь, является дискретной моделью области определения искомой функции.

Применение метода сеток позволяет свести дифференциальную краевую задачу к системе в общем случае нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых значений функций.

В общем случае алгоритм метода сеток состоит из трех этапов.

**Этап 1 Дискретизация задачи.** Построение сетки в заданной области.

**Этап 2 Алгебраизация задачи** Получение системы алгебраических уравнений относительно узловых значений.

**Этап 3**. Решение полученной системы алгебраических уравнений.

Используются два метода сеток:

1) метод конечных элементов (МКЭ);

2) метод конечных разностей (МКР).

Эти методы отличаются друг от друга на этапах 1 и 2 алгоритма. На этапе 3 методы практически идентичны.

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее популярных методов решения краевых задач в системах автоматического проектирования (САПР). В математическом отношении метод относится к группе вариационно-разностных. Строгое доказательство таких важных ствойств, как устойчивость, сходимость и точность метода, проводится в соответствующих разделах математики и часто представляет собой непростую проблему. Тем не менее, МКЭ активно развивается, с его помощью и без строгого математического обоснования используемых приемов успешно решаются сложные технические проблемы. Правильность же работы созданных алгоритмов и программ, реализующих МКЭ, проверяют на известных точных решениях. Начав развиваться как метод решения задач строительной механики, МКЭ быстро завоевал такие сферы инженерной деятельности, как проектирование самолетов и автомобилей, космических ракет, тепловых и электродвигателей, турбин, теплообменных аппаратов и др.

Его теоретическое обоснование было в основном завершено в 70-е годы, а с появлением высокопроизводительной вычислительной техники он стал важным инструментом исследований в науке и технике. Появилось множество пакетов прикладных программ, как коммерческих, так и общедоступных, позволяющих решать разнообразные задачи – теплопроводности, электродинамики, механики деформируемого твердого тела, гидродинамики и др. МКЭ представляет собой синтез метода сеток и проекционного метода Галеркина с выбором базиса из финитных функций, носители которых (конечные элементы) покрывают каждый узел сетки. В результате применения к такому базису проекционной процедуры для коэффициентов разложения искомого решения получается система алгебраических уравнений, аналогичная той, к которой приводят сеточные методы – матрица ленточная, количество неизвестных равно количеству узлов сетки. Заметим к тому же, что при определенном выборе финитных функций искомые коэффициенты являются приближенными значениями решения в узлах сетки.

Поэтому можно сказать, что МКЭ – это тот же классический метод сеток, в котором конечно-разностная схема получается в результате применения проекционной процедуры к базису из финитных функций, привязанных к каждому узлу сетки. Такой способ получения конечно-разностной схемы позволил избавиться от основного недостатка классического метода сеток – привязки узлов сетки к координатным линиям, что позволило в случае многомерных задач гибко адаптировать сетку к произвольной форме границ и особенностям искомого решения.

### 2.2. Пример решения одномерной задачи

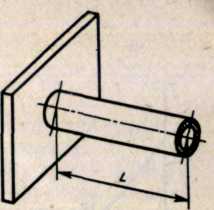
Рассмотрим пример использования МКЭ для расчета одномерного температурного поля в неоднородном стержне. Пусть имеется стержень длиной  и площадью поперечного сечения  (рис. 2.1). Один конец стержня жестко закреплен, и к нему подводится тепловой поток  заданной интенсивности. На свободном конце стержня происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Известны коэффициент теплообмена  и температура окружающей среды . Вдоль боковой поверхности стержень теплоизолирован.

Рис. 2.1. Однородный стержень, находящийся под воздействием тепло­вого потока.

Температурное поле в неоднородном стержне описывается уравнением теплопроводности, которое в одномерном приближении имеет вид



Краевые условия определяются уравнениями:

 при ;

 при 

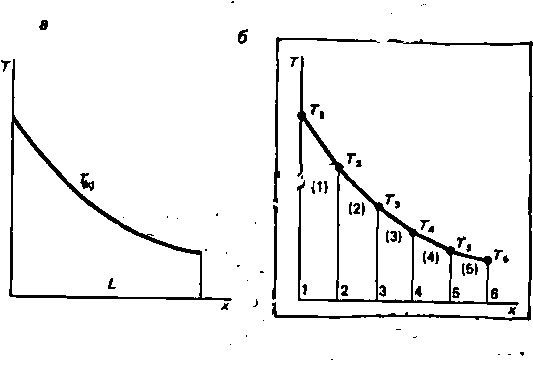


Рис. 2.2. Расчет одномерного температурного поля в однородном стержне методом МКЭ.

Искомое температурное поле является непрерывной функцией координаты  (рис. 2.2, а). В МКЭ стержень разбивается произвольным образом на конечные элементы, которые в данном случае являются отрезками неравной длины. На каждом элементе непрерывная функция  аппроксимируется некоторой линейной зависимостью, как показано на рис. 2.2,б (в скобках указаны номера элементов). Аппроксимирующая кусочно-линейная функция определяется через узловые значения , которые в общем случае неизвестны и подлежат определению в МКЭ. Рассмотрим реализацию МКЭ на решении простейшей задачи, :



Выбираем равномерную сетку и ищем решение в виде

.

Мы здесь обозначили . Заметим, что,  в силу граничныхусловий . Производная от функции-крышки также финитная функция:





Используем проекционные уравнения -



Ввиду ограниченности функций каждое *i-*е уравнение содержит только тричлена:



Обозначим

, , 

Получаем конечно-разностную схему,:



Как видим, технология МКЭ для одномерного уравнения приводит практически к той же конечно-разностной схеме с трехдиагональной матрицей, что и классический метод сеток. Имеются, однако, некоторые отличия в вычислении коэффициентов. А именно, в МКЭ коэффициенты  вычисляются через интегралы по соответствующим участкам сетки. Это значит, что технология МКЭ приводит к так называемым однородным конечно-разностным схемам, т.е. таким, которые позволяют проводить расчеты ДУ с разрывными коэффициентами.

### 2.3. Конечные элементы для многомерных областей

Аналогичный подход может быть и в случае двух- и трехмерных областей определения искомой функции.

Для двухмерных областей наиболее часто используются элементы в форме треугольников и четырехугольников. При этом элементы могут иметь как пря-мо, так и криволинейные границы, что позволяет с достаточной степенью точности аппроксимировать границу любой формы.

Для трехмерных областей наиболее употребимы элементы в форме тетраэдра и параллелепипеда, которые также могут иметь прямолинейные и (или) криволинейные границы.

В общем случае алгоритм МКЭ состоит из четырех этапов.

Этап 1. Выделение конечных элементов (т. е. разбиение заданной области на конечные элементы).

Этап 2. Определение аппроксимирующей функции для каждого элемента (определение функции элемента). На данном этапе значение непрерывной функции  в произвольной точке () – го конечного элемента аппроксимируется полиномом

 (2.3.1)

где  – вектор-строка коэффициентов полинома;  – свободный член;  – вектор координат в рассматриваемой точке.

Задача этапа далее заключается в определении неизвестного вектора  и свободного члена . Для этого, используя условие непрерывности функции в узлах, коэффициенты полинома выражают через вектор  узловых значений функции и координаты узлов. Проделав эквивалентные преобразования, получают

 (2.3.2)

где  – матрица-строка, элементы которой называют функциями формы конечного элемента.

Функции формы легко вычисляются в каждой точке конечного элемента через координаты самой точки и координаты узлов элемента.

Этап 3. Объединение конечных элементов в ансамбль. На этом этапе уравнения (1.3.2), относящиеся к отдельным элементам, объединяются в ансамбль, т. е. в систему алгебраических уравнений:

 (2.3.3)

Система (2.3.3) является моделью искомой непрерывной функции.

Этап 4. Определение вектора узловых значений функции. В общем случае вектор  в (2.3.3) вначале неизвестен. Его определение – наиболее сложная процедура в МКЭ.

Разработано несколько алгоритмов вычисления вектора . Один из алгоритмов основан на минимизации функционала, связанного с физическим смыслом решаемой задачи, и состоит из следующих этапов:

Этап 1. Выбор функционала , зависящего для стационарных задач от искомой функции  и ее частных производных  по вектору пространственных координат:

 (2.3.4)

где  – объем заданной области. Функционал  представляется суммой соответствующих функционалов, относящихся к отдельным конечным элементам :

 (2.3.5)

где  – число элементов.

Этап 2. Подстановка аппроксимирующего выражения (2.3.2) в (2.3.5) и вычисление производных по формулам вида



Этап 3. Минимизация по вектору  функционала . Для этого составляются уравнения

 (2.3.6)

Суммирование выражений (1.3.6) по конечным элементам приводит к системе алгебраических уравнений

 (2.3.8)

где  – матрица коэффициентов, так называемая, – матрица жесткости;  – вектор нагрузки.

Этап 4. Решение системы (2.3.8), позволяющее определить неизвестный вектор узловых значений.

Найденные значения вектора  подставляют в (2.3.3), после чего значение функции  легко вычисляется в любой точке заданной области.

Каждый из четырех этапов приведенного алгоритма МКЭ при реализации в САПР обладает особенностями, которые подробно рассматриваются ниже.

**Разбиение области на элементы**

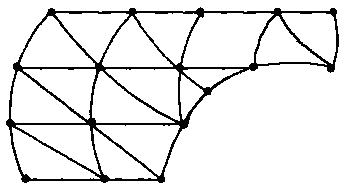
Выделение конечных элементов. Разбиение области на элементы – важный этап в МКЭ. От качества разбиения во многом зависит точность получаемых результатов. Например, разбиение на двухмерные элементы, близкие по форме к равносторонним треугольникам, обеспечивает лучшие результаты по сравнению с разбиением на вытянутые по форме треугольные элементы. Возможность легко варьировать размерами элементов – важное свойство МКЭ (последнее позволяет без труда учитывать концентрацию напряжений, температурные градиенты, различные свойства материала изучаемого объекта и т. д.). Разбиение области на элементы обычно начинают от ее границы с целью наиболее точной аппроксимации формы границы, затем производится раз-биение внутренних областей. Часто разбиение области на элементы производят в несколько этапов. Сначала область разбивают на достаточно крупные подобласти (под конструкции), границы между которыми проходят там, где изменяются свойства материала, геометрия, приложенная нагрузка и пр. Затем каждая подобласть разбивается на элементы. Резкого изменения размеров конечных элементов на границах подобластей стараются избегать. На рис. 1.3 приведен пример разбиения двухмерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами.

Рис. 2.3. Разбиение двухмерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами.

Нумерация узлов элементов (глобальная нумерация узлов)

**–** следующая процедура этапа выделения конечных элементов. Порядок нумерации имеет в данном случае существенное значение, так как влияет на эффективность последующих вычислений. Дело в том, что матрица коэффи-циентов системы линейных алгебраических уравнений, к которой приводит МКЭ, – сильно разреженная матрица ленточной структуры.

Ненулевые элементы такой матрицы располагаются параллельно главной диагонали. Целое число , представляющее собой наибольшую разность между номерами ненулевых элементов в строке, называется шириной полосы. Чем меньше ширина полосы, тем меньший объем ОП требуется для хранения матрицы при реализации МКЭ в САПР и тем меньше затраты машинного времени на решение результирующей системы уравнений. Ширина полосы зависит, в свою очередь, от числа степеней свободы узлов и способа нумерации последних. Под числом степеней свободы понимают количество неизвестных функций, определяемых в каждом узле. Так, например, для двухмерных задач гидравлики в каждом узле определяют три переменные: давление и состав-ляющие скорости по осям и 

При нумерации узлов предпочтителен способ, обеспечивающий минимальную разность между номерами узлов в каждом отдельном элементе. Если максимальную разность между номерами узлов для отдельного элемента обозначить , а число степеней свободы – , то ширина полосы равна



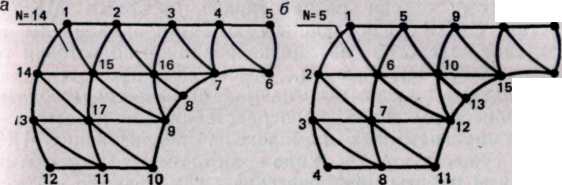


Рис. 2.4. Способы нумерации узлов при разбиении двухмерной области на конечные элементы

В некоторых случаях уменьшение числа  может быть достигнуто последовательной нумерацией узлов при движении в направлении наименьшего размера рассматриваемой области. На рис. 2.4. приведены два различных способа нумерации узлов произвольной области, разбитой на ко-нечные элементы. При первом способе (рис. 2.4, а) =14, при втором (рис. 2.4, б) =5. Ширина полосы для представленных способов при одной степени свободы в узле получается равной соответственно 15 и 6;при двух степенях свободы — 30 и 12. Рациональная нумерация в случае рис. 2.4, б сокращает необходимый объем памяти почти в три раза по сравнению со случаем рис. 2.4, а.

Информация о способе разбиения области на конечные элементы и нумерации узлов является исходной для всех следующих этапов алгоритмов МКЭ при реализации метода в САПР. При этом требуется указывать не только номер, но и координаты каждого узла и его принадлежность к опреде-ленным конечным элементам. Такого рода информация называется топологической и обычно содержит примерно в 6 раз больше чисел, чем количество узлов системы.

При описании области, разбитой на конечные элементы, необходимо задавать: тип конечного элемента; его порядковый номер; номера узлов элемента; координаты узлов, информацию о соединении элементов между со-бой; значение физических параметров объекта в пределах каждого конечного элемента. Так, промышленная эксплуатация программной системы долгое время тормозилась именно сложностью подготовки исходных данных, объем которых в некоторых случаях достигал нескольких сотен тысяч.

При решении задач методом конечных элементов область определения искомой функции разбивается на несколько тысяч элементов примерно с таким же количеством узлов. В связи с этим возникают проблемы, связанные со сложностью подготовки столь большого количества исходной информации и с трудностью ее проверки и корректировки, так как при ручной подготовке такого объема исходных данных неизбежно появление ошибок.

Поэтому усилия разработчиков программ МКЭ в составе САПР в последние годы были направлены на создание подсистем автоматизированной подготовки топологической информации, основу которых составляют специальные программы, называемые препроцессорами. Препроцессоры либо непосредственно включаются в состав программных комплексов, реализующих МКЭ, либо существуют в виде автономных программ.

Алгоритм работы препроцессора, как правило, состоит из следующих этапов:

Этап1. Нанесение на заданную область некоторого множества узлов.

Этап2. Формирование узловых связей с целью заполнения области конечными элементами «наилучшей» формы.

Этап3. Нумерация узлов, минимизирующая ширину полосы в матрице коэффициентов системы уравнений.

Последняя процедура поддается алгоритмизации особенно просто и реализована практически во всех крупных программных комплексах на основе МКЭ. При автоматическом нанесении на исходную область множества узлов должен выдерживаться ряд требований. Так, узлы должны сгущаться в зонах, где ожидаются высокие концентрации напряжений или градиенты температур. При этом изменение густоты узлов не должно быть скачкообразным. Эти требования удается обеспечить, если в качестве координат узлов брать случайные числа с заданным законом распределения. Тогда в программных реализациях координаты узлов генерируются датчиком случайных чисел. Алгоритмы формирования межузловых связей строятся на основе различных подходов. При этом в первую очередь стараются, если это возможно, использовать упрощающие предположения. Так, регулярность области, очевидно, удобно использовать для построения однородной сетки, шаг которой меняется по несложному закону. Криволинейные границы области часто аппроксимируют с помощью отрезков прямой, параболы или дуги.

В основу разбиения области произвольной формы на треугольные конечные элементы может быть положен следующий алгоритм:

Этап1. Аппроксимация границы области совокупностью отрезков, представляемых номерами узлов.

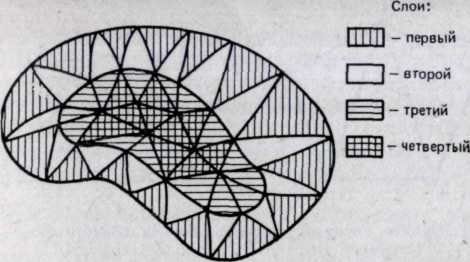


Рис. 2.5. Пример использования алгоритма автоматического разбие­ния произвольной области на треугольные конечные элементы.

Этап2. Выбор вершин треугольников, основаниями которых служат полученные на этапе 1 отрезки (при этом выбор вершин разрешен только с одной вполне определенной стороны).

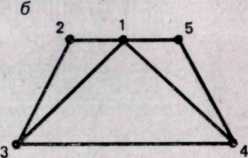
Этап3. Соединение основания с выбранной вершиной отрезками, которые на следующем шаге сами будут рассматриваться как основания новых треугольников.

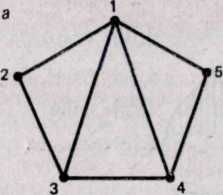
Алгоритм повторяется до тех пор, пока остается возможным строить новые элементы на базе проведенных отрезков, т. е. до полного заполнения области элементами.

Пример такого «послойного» заполнения области элементами приведен на рис. 2.5. При построении очередного треугольника для анализа выбираются вначале два ближайших к основанию узла с «разрешенной» стороны. На выбранных узлах строится прямоугольник. Далее проводится топологический анализ, использующий информацию об уже построенных элементах. Целью анализа является исключение возможности попадания какого-либо узла внутрь построенного треугольника. На основании анализа выбирается одна из двух возможных вершин и четырехугольник делится на треугольники одним из двух возможных способов.

Примером другого подхода к автоматическому разбиению области на элементы служит следующий алгоритм:

Этап1. Определение граничных узлов области.



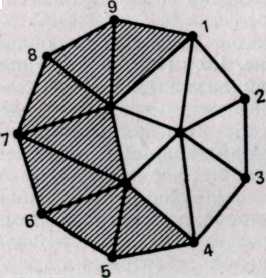
Рис. 2.6. Пример автоматического разбиения области с пятью гра­ничными узлами на треугольные элементы: а — регулярная сетка; б — сетка в заданной области.

Этап2. Построение регулярной сетки с тем же числом узлов, что и в заданной области.

Этап3. Использование полученной схемы соединения узлов для области произвольной формы.

На рис. 2.6 приведен пример разбиения на треугольные конечные элементы области с пятью граничными узлами.

Еще один алгоритм для построения регулярной сетки заключается в следующем:

Этап1. Окружение исходной точки кольцом равносторонних треугольников так, чтобы число внешних узлов было предельно близким к заданному числу граничных узлов.

Этап2. Если желаемый результат не достигнут, добавление еще одного ряда колец.

На рис. 2.7. проиллюстрировано использование приведенного алгоритма для построения регулярной сетки «наилучшего» вида для границы с девятью узлами. Полученная в результате проведенного построения схемаcоединения узлов позволяет получить координаты всех внутренних

*Рис. 2.7* Пример использования алгоритма автоматического построения сетки наилучшего вида в области с десятью граничными узлами.

точек области. Если в результате выполнения алгоритма вид конечных элементов оказывается неудовлетворительным, то исходная область разбивается на подобласти и все повторяется сначала.

### 2.4 Аппроксимирующие функции элементов

Определение аппроксимирующей функции элементов. Эту процедуру можно выполнить один раз для типичного элемента области безотносительно к его топологическому положению в ней. Полученная функция используется далее для всех остальных элементов области того же вида. Эта особенность является важным аспектом МКЭ. Благодаря ей элементы с однажды определенными функциями легко включаются в библиотеку элементов соответствующего программного комплекса. Далее эти элементы применяются для решения разнообразных краевых задач.

Выше отмечалось, что в качестве аппроксимирующих функций элементов чаще всего используются полиномы. В зависимости от степени последних конечные элементы делятся на симплекс-, комплекс- и мультиплекс-элементы. Полиномы симплекс-элементов содержат константы и линейные члены; полиномы комплекс-элементов — константы, линейные члены, а также члены более высоких степеней. Комплекс-элементы, как правило, кроме граничных имеют дополнительные внутренние узлы. Полиномы мультиплекс-элементов также содержат члены более высоких степеней. Однако на мультиплекс-элементы накладывается дополнительно еще одно условие: их границы должны быть параллельны координатным осям.

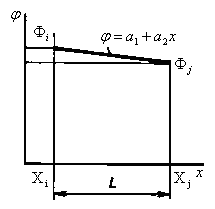
**Одномерный симплекс-элемент** ­представляет собой отрезок, изображенный на рис. 2.8. При определении функции этого элемента для 

Рис. 2.8. Одномерный симплекс-элемент.

простоты будем считать, что узловые значения искомой непрерывной функции, определенные на концах отрезка, известны. По длине отрезка значение функции аппроксимируется линейным полиномом вида:

. (2.4.1)

Коэффициенты  и определяются через узловые значения функции , в соответствии с условием непрерывности:



(2.4.2)

Подставив (2.4.2) в (2.4.1), получим

(2.4.3)

Решив систему (2.4.3) относительно  и получим



Подставив вычисленные значения коэффициентов аппроксимирующего полинома в (2.4.1), найдем

(2.4.4)

Проведя эквивалентные преобразования правой части уравнения (2.4.4), представим его в форме

 (2.4.5)

Члены уравнения (2.4.5),заключенные в квадратные скобки, являются функциями формы одномерного симплекс-элемента:

(2.4.6)

С учетом обозначений (2.4.6) уравнение (2.4.4) принимает вид

, (2.4.7)

или в матричной форме

(2.4.8)

где

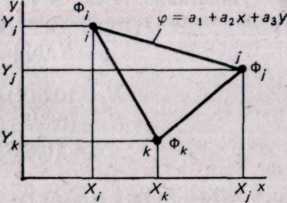
 - матрица-строка;  вектор-столбец.

Функции формы обладают следующим свойством: функция формы с номером *i*равна 1 в узле с соответствующим номером и равна 0 во всех других узлах. Не представляет труда убедиться в наличии этого свойства у функций формы (2.4.6).

**Двухмерный симплекс-элемент**представляет собой плоский треугольник с прямолинейными сторонами, уже использовавшийся выше для дискретизации произвольной двухмерной области. Интерполяционный полином, аппроксимирующий непрерывную функцию  внутри треугольного симплекс-элемента, имеет вид

(2.4.9)

Рис. 2.9. Функция двухмерного симплекс-элемента.

Чтобы получить выражения для функций формы элемента, необходимо пронумеровать узлы треугольника. Обозначим их номерами i, j, k, начиная с произвольно выбранного узла, двигаясь при этом против часовой стрелки (рис. 2.9). Узловые значения  будем по-прежнему считать известными.

Используя условие непрерывности искомой функции в узлах аналогично предыдущему случаю, составим систему уравнений



разрешая которую относительно неизвестных коэффициентов полинома, получим:

(2.4.10)

где S - площадь элемента, вычисляемая по формуле



Подставив (2.4.10) в (2.4.9) и проделав преобразования, аналогичные предыдущему случаю, найдем

(2.4.11)

где функции формы имеют вид

 (1.4.12)

а



Вычисляя значения функций формы ,нетрудно убедиться, что они равны 1 в узлах с соответствующими номерами и 0 в остальных узлах элемента.

Заметим, что функции (2.4.7) для одномерного и (2.4.11) для двухмерного симплекс-элементов были получены для типичных элементов безотносительно к их положению в области. Поэтому они удовлетворяют всем элементам данного типа, что, как отмечалось выше, позволяет создавать обширные библиотеки элементов в САПР.

### 2.5. Объединение конечных элементов в ансамбль.

Основу этого этапа составляет замена произвольно назначенных выше номеров узлов  на номера, присвоенные узлам в процессе разбиения рассматриваемой области. Эта процедура приводит к системе линейных алгебраических уравнений, позволяющей при известных узловых значениях искомой функции получить значение последней в любой точке области.

Рассмотрим процедуру составления ансамбля конечных элементов для сформулированной выше задачи о нахождении поля температур в стержне (см. рис. 2.2, а). Кусочно-элементная модель области приведена на рис. 2.2,б, а функция отдельного элемента определяется уравнением (2.4.7).

Можно написать следующее соответствие между произвольными номерами  фигурирующими в уравнении (2.4.7), и глобальными номерами узлов рассматриваемой дискретной модели: для

 (2.5.1а)

 (2.5.1б)

 (2.5.1в)

 (1.5.1г)

 (2.5.1д)

Подставив значения номеров узлов (2.5.1) в (2.4.7), получим:

 (2.5.2)

где верхние индексы в скобках относятся к номеру элемента.

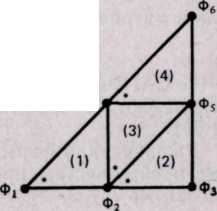
В выражениях для функций формы элемента (2.4.7) значения произвольных номеров  также следует изменить в соответствии с (2.5.1). Тогда значения , например, определяются по формулам



Очевидно, что  не равны друг другу даже в случае равенства длин элементов . При известных значениях узловых величин  уравнения (2.5.2) позволяют определить значение температуры в любой точке стержня.

Рассмотрим еще один пример объединения элементов двухмерной области в ансамбль, который потребуется для иллюстрации дальнейших этапов МКЭ.

Треугольная область разбита на элементы треугольной формы, как показано на рис. 2.10. Для обозначения узлов отдельных элементов по



*Рис. 1.10*. Пример составления ансамбля конечных элементов для двухмерной треугольной области.

прежнему используются номера , начиная с произвольного узла (на рисунке отмеченного звездочкой)против часовой стрелки. Соответствие между этими обозначениями и глобальными номерами узлов следующее:

 (2.5.3а)

 (2.5.3б)

 (2.5.3в)

 (2.5.3г)

Подставляя значения (2.5.3) и (2.4.11), получим:

 (2.5.4)

Аналогичную замену номеров необходимо проделать в (2.4.12) при вычислении функций формы элементов. Система (2.5.4) – сокращенная форма математического описания модели. Расширенная форма имеет вид



или в матричной форме

 (2.5.5)

В САПР с целью уменьшения объема памяти чаще используют сокращенную форму описания моделей (2.5.4). Расширенная форма описания моделей имеет некоторые преимущества при реализации следующих этапов алгоритма МКЭ.

### 2.6. Определение вектора узловых значений функций.

Для этой цели, как отмечалось выше, используется несколько методов.

Метод, основанный на вариационной постановке задачи, требует минимизации некоторого специально подобранного функционала, который связан с физическим смыслом задачи. Подбор функционала является нетривиальной процедурой, требующей глубоких знаний в конкретной предметной области.

• Пример минимизации функционала в задаче о нахождении рас-пределения температуры в стержне. При указанном методе минимизируется функционал:

 (2.6.1)

где  - объем тела;  - площадь границы.

В функционал входят оба граничных условия (2.1.1). При минимизации функционала используется множество функций элементов дискретизированной области. Для простоты вычислений будем считать, что стержень разбит всего на два элемента (в практических случаях этого недостаточно). Тогда

(2.6.2)

Функционал (2.6.1) удобно представить в виде

(2.6.3)

где  - площади сечений стержня, на которых заданы граничные условия (2.1.1а) и (2.1.1б) соответственно.

Для вычисления объемного интеграла в (2.6.3) его необходимо разбить на две области в соответствии с принятой конечно-элементной моделью:

(2.6.4)

Производные вычисляются с учетом (2.6.2) :

(2.6.5)

Подставив (2.6.5) в (2.6.4) и считая, что , получим

(2.6.6)

Второе и третье слагаемые в (2.6.3) вычисляются просто, так как подынтегральным функциям соответствуют узловые значения :

(2.6.7)

(2.6.8)

где - площади поверхностей, на которых заданы *q*и (для рассматриваемого примера ).

Значение функционала вычисляется простым суммированием выражений (2.6.7) - (2.6.8):

(2.6.9)

где

 и 

Для минимизации функционала Fнеобходимо выполнение условий



или в матричной форме

(2.6.10)

В общем виде (2.6.10) можно представить так:.

**Примечание.***Матрица коэффициентов К в (2.6.10) по-прежнему называется матрицей жесткости, хотя по физическому смыслу в данной задаче ее удобнее было бы назвать матрицей теплопроводности. Такое название матрицы К пришло из строительной механики, где МКЭ начал применяться раньше, чем в других областях.*

Зная характеристики материала, из системы (2.6.10) можно определить узловые значения .

Из (2.6.9) и (2.6.10) нетрудно заметить, что однотипные конечные элементы вносят в эти выражения слагаемые одного вида. Поэтому при реализации МКЭ в САПР вклад элемента определенного типа в матрицу жесткости вычисляется только один раз, а затем используется во всех необходимых случаях.

Метод Галеркина — другой широко известный метод вычисления вектора узловых значений — представляет собой частный случай более общего метода взвешенных невязок. Основным преимуществом этогометода является то, что основой для него служит исходное дифференциальное уравнение. Поэтому метод Галеркина с успехом применяется при решении задач, для которых не удается подобрать функционал для минимизации (например, задач, математическим описанием которых служат уравнения Навье-Стокса).

Метод Галеркина основан на минимизации невязки приближенного решения и исходного дифференциального уравнения , где  — дифференциальный оператор решаемой задачи.

Для минимизации  в заданной области Gтребуется ортогональность невязки функция формы т.е. выполнение равенства  для каждой из функций .

Сочетание метода Галеркина с МКЭ приводит к системе уравнений:

 при ,

где – левая часть исходного дифференциального уравнения, описывающего непрерывную функцию .

Технику получения разрешающей системы уравнений методом Галеркина легко проиллюстрировать на примере уже решенной выше задачи об отыскании температурного поля в однородном стержне, конечно-элементная модель которого была представлена ранее.

Применив метод Галеркина, получим:

 (2.6.11)

Подставим в (2.6.11) формулу дифференцирования произведений:

 (2.6.12)

Интерполяционная функция не сохраняет постоянства по длине стержня, поэтому интеграл в (2.6.12)необходимо представить суммой соответствующих интегралов для отдельных элементов. Тогда, второй интеграл в (2.6.12) представляется в виде:

. (2.6.13)

Вычислим в (2.6.13) интегралы, относящиеся к отдельным элементам:

; (2.6.14)

(2.6.15)

С учетом (1.6.14) и (1.6.15)

. (2.6.16)

Первый интеграл в (2.6.12) на основании теоремы Остроградского—Гаусса преобразуется к виду:

, (2.6.17)

где ; ***n***— внешняя нормаль к рассматриваемой поверхности.

С учетом краевого условия в точке x= 0 для первого элемента интеграл (2.6.17) принимает вид:

. (2.6.18)

Подставив значения ,  в (2.6.18), получим:

. (2.6.19)

С учетом краевого условия в точке x=Lдля второго элемента интеграл (2.6.17) запишется так:

. (2.6.20)

Просуммировав выражения вида (2.6.20) для первого и второго элементов и выражения (2.6.19) и (2.6.20) и приравняв сумму нулю, получим систему уравнений:

, (2.6.21)

где  и .

Система (2.6.21) идентична системе (2.6.10), определенной путем минимизации соответствующим образом подобранного функционала.

Завершающим шагом этапа определения вектора узловых значений Ф является решение системы линейных алгебраических уравнений.

■ **Примечание**.*Основные особенности этого шага — большая размерность и сильная разреженность матрицы коэффициентов системы. В связи с этим для реализации МКЭ в САПР разработаны специальные способы хранения матрицы жесткости, позволяющие уменьшить необходимый для этого объем ОП. Для нахождения узловых значений функций применяются методы преобразования и решения системы, направленные на снижение затрат машинного времени.*

### 2.7.Двухмерные финитные функции на треугольной сетке

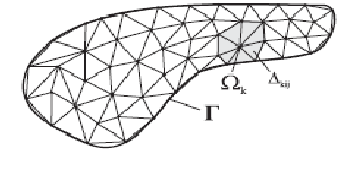
При решении двухмерных краевых задач наибольшее распространение получили кусочно-линейные базисные функции, построенные на треугольной сетке. В этом случае область покрывается сеткой из треугольников Δ*kij* (триангуляция), например, как показано на рис.2.11,

Рис. 2.11.

Каждая пара треугольников имеет либо одну общую вершину, либо одну общую сторону, либо не пересекается.

2). При выборе приграничных треугольников желательно, чтобы на границу попадали либо одна либо две вершины. Иногда бывает удобно описать многоугольником границу.

Множество вершин треугольников обозначим. На каждом треугольнике  , имеющем вершину , определим кусочно-линейную функцию , которая в точке равна единице, а в точках 

равна нулю.

Аналитически эта функция задается довольно просто:



Рис.2.12

Теперь выбираем набор конечных элементов следующим образом: в  будут входить все треугольники , имеющие вершину :, а функция составляется из функций треугольников, смежных с вершиной , как показано на рис. 2.12.

В заключение отметим, что для трехмерной области при выборе базиса вместо треугольной сетки покрывается сеткой из тетраэдров . Конечный элемент , связанный с узлом , состоит из тетраэдров, имеющих вершину . Финитная функция строится аналогично из кусочно линейных функций тетраэдра:





Коэффициенты этой функции находятся из решения системы трех линейных уравнений:



### 2.8.. Решение двухмерной задачи Дирихле на треугольной сетке

Проиллюстрируем технологию МКЭ на примере решения задачи Дирихле для двухмерного уравнения Пуассона.



Допустим, что область , на которой необходимо получить решение, покрыта треугольной сеткой и представлена на рис. 2.14. Решение ищем в виде



где  - набор финитных функций, привязанных к внутренним узлам сетки  Следует отметить, что построение треугольной сетки для произвольной области, учитывающей особенности получаемого решения, является зачастую наиболее трудоемкой задачей при использовании МКЭ.

Результатом триангуляции являются список узлов , - номера внутренних узлов, - номера граничных узлов) и список треугольников , содержащий номера соответствующих - му треугольнику узлов-вершин. Зная координаты вершин и список треугольников, легко построить список конечных элементов , связанных с каждым узлом сетки, вычислить параметры  соответствующих финитных функций , а также всю необходимую информацию – площади треугольников , координаты их центров тяжести  и др.

При построении конечно-разностной схемы воспользуемся проекционным соотношением для внутренних узлов:



Ввиду линейности финитных функций на каждом треугольнике значения производных, входящих в интеграл постоянны. Кроме того, как видно из рисунка, в каждом уравнении имеется только  отличных от нуля матричных элементов (заметим, что количество вершин у разных элементов  могут отличаться):





Причем

,

а элементы вычисляются как интегралы по двум смежным треугольникам:



При вычислении интегралов в ввиду малости для случая непрерывных  обычно используют формулу средних

,

где – точка пересечения медиан. Решается система методом простой итерации или Зейделя с использованием релаксации:



Эффективность метода во многом зависит от удачной программной реализации итерационного процесса.

**Контрольные вопросы**

1. В чем отличие МКЭ от классического метода сеток?

2. Как построить конечно-разностную схему по МКЭ задачи Дирихле для

одномерного уравнения второго порядка?

3. Как строится конечно-разностная схема для двухмерной области на осно-

ве треугольной сетки?

4. Какие результаты триангуляции области являются исходными данными

для построения конечно-разностной схемы по технологии МКЭ?

.

## 3.Тема 9 Численные методы решения интегральных уравнений

В этой главе мы дадим краткое описание алгоритмов решения интегральных уравнений, не вникая подробно в вопросы оценки погрешности. Задача решения интегральных уравнений возникает как вспомогатель­ная при решении краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными и как самостоятельная при исследовании ра­боты ядерных реакторов, при решении так называемых обратных задач геофизики, при обработке результатов наблюдений и т.п. Мы ограничим­ся рассмотрением случая интегральных уравнений с одной неизвестной функцией и одной независимой переменной.

### 3.1.РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегро-дифференциальным уравнение называется уравнение, содержащее неизвестную функцию как под знаком интеграла, так и под знаком производной. В качестве простейших можно привести уравнения

 (3.1)

 (3.2)

Поскольку уравнения (3.1) и (3.2) содержат производную, то требуется задание начального условия

 (3.3)

Интегро-дифференциальные уравнения очень разнообразны. В них могут входить производные более высоких порядков, например,

 (3.4)

Тогда в качестве дополнительных условий следует взять

; (3.5)

(начальная задача) или

; (3.6)

(краевая задача).

Производные могут входить, кроме того, под знак интеграла. Могут быть интегро-дифференциальные уравнения с частными производными, в которых интегрирование ведется, вообще говоря, по многомерной области.

Встречаются уравнения, в которых интегрирование ведется по одному аргументу искомой функции, а дифференцирование по другому. Например,

 (3.7)

Встречаются также системы интегро-дифференциальных уравнений и нелинейные уравнения. В рассмотренных ниже физических примерах мы встретимся и с теми и с другими.

#### ПРИМЕРЫ.

1. Пусть человек совершает некоторую работу А. Со свежими силами он может развить мощность , где . Если же человек до этого уже работал, то производительность его труда меньше вследствие усталости. Эта усталость определяется как величиной ранее затраченных усилий, так и временем восстановления сил после предыдущей работы. В результате получаем, что производительность труда определяется уравнением

 (3.8)

где  характеризует влияние мощности , затраченной в момент , на усталость человека в момент . Интегрируя по частям последнее слагаемое в соотношении (3.8) и обозначая получаем интегро-дифференциальное уравнение



которое и определяет работу, совершенную человеком к моменту *t*.

**Замечание**. Дифференцируя (3.8), можно получить интегро-дифференциальное уравнение относительно мощности *W(t)*, где 



2. В качестве второго примера рассмотрим задачу из теории электрических цепей.

Убедимся. Что эту задачу можно свести к интегро-дифференциальному уравнению относительно напряжения *u*. Действительно, воспользуемся тем, что ток равен . Без магнитного сердечника справедливо соотношение , где , а при наличии магнитного сердечника возникает явление гистерезиса и имеет место более сложное соотношение

 (3.9)

Где функция P(*t, s*) учитывает влияние значения потока индукции в момент *s* на силу тока в момент *t*и определяется эмпирическим способом. Учитывая выражение для Ф через *u*, получим



Таким образом

 (3.3)

что и требовалось получить.

3. Этот пример относится к области экологии. Рассмотрим так называемую модель “хищник-жертва”. Пусть в некоторой среде сосуществуют два вида живых организмов. Один из этих видов “жертвы” может неограниченно получать питание из окружающей среды. Обозначим число особей этого вида . Второй вид – “хищники”, число которых  питается только представителями первого вида. Число встреч, кончающихся гибельным исходом Для первого вида, пропорционально . Отсюда следует, что за время *dt* изменение числа  будет , где  характеризует скорость размножения “жертв” в от­сутствие “хищников”.

“Хищники” умирают естественной смертью и их убыль за время *dt* выражается величиной . Что касается их рождаемости, то она зависит от питания в течение неко­торого времени *Т*, предшествующего появлению потомства. Отсюда



где функция .характеризует влияние количества пи­щи, съеденной хищником в момент  (это количество пропор­ционально ), на рождаемость в момент *t*.

В результате получаем, что численность рассматриваемых популяций удовлетворяет системе нелинейных уравнений





одно из которых является дифференциальным, а другое — интегро-дифференциальным.

**Замечание.** Если процесс рассматривается начиная с некоторого момента , то нижний предел можно поло­жить постоянным и равным , а функцию  счи­тать равной нулю, если .

4. К уравнениям „типа (3.7)" относится хорошо известное в физике так называемое кинетическое уравнение Больцмана. Оно имеет значительно более сложную структуру, но характерным является то, что дифференцирование произ­водится по одному аргументу, а интегрирование — по другим. Это уравнение описывает состояние идеального одно­атомного газа с учетом столкновений частиц.

В случае однородного и изотропного газа и отсутствия внешних сил оно имеет вид:



Здесь — плотность распределения частиц газа (т. е.  — это число частиц газа, координаты скорос­ти которых в момент *t* заключены в интервале ); — скорости частиц газа до столкновения; — скорости частиц после столкновения;  — элемент площади в плоскости, перпендикулярной вектору ;—некоторый параметр. Скорости связаны с  законами сохра­нения энергии и импульса. Связь эта зависит от предпола­гаемого механизма взаимодействия частиц.

5. Интегро-дифференциальные уравнения, встречающиеся в физике, весьма разнообразны. Объектом интенсивного изучения в настоящее время является так называемое уравнение Уизема

 (3.11)

описывающее распространение нелинейных волн в диспергирующих и диссипативных средах. Ядро в уравнении имеет особенность при .

Это уравнение было предложено Уиземом для изучения поверхностных волн на мелкой воде. При этом функция описывает свободную поверхность жидкости.

### 3.2. ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

#### 3.2.1. Линейные уравнения.

Рассмотрим сначала интегро-дифференциальное уравнение (3.1) с начальным условием (3.3)

. (3.12)

Предположим, что *А(х)* и *f(х)* непрерывны при ааядро непрерывно при 

Задачу (3.12) можно свести к интегральному уравнению типа Вольтерра, Действительно,. решая (3.12) как дифференциальное уравнение с неоднородностью



получим

 (3.13)

Меняя во втором слагаемом порядок интегрирования, будем иметь

 (3.14)

где есть сумма первого и третьего слагаемого в (3.13), а ядро равно



Решение интегрального уравнения (3.14) существует и единственно на отрезке 

#### 3.2.2. Нелинейные уравнения.

Пусть задана система уравнений вида

 (3.15)

*i = 1, … ,n,*

при начальных условиях

 (3.16)

Здесь и - заданные функции своих аргументов.

Приведенная в примере. 2 предыдущего параграфа система уравнений, описывающая модель „хищник — жертва", принадлежит этому классу.

Метод последовательных приближений, может быть развит и применен к исследованию вопроса существования решения нелинейной задачи (3.15), (3.16). Изложенный ниже способ доказательства представляет собой обобщение схемы, для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ограничимся рассмотрением случая. Исследование общего случая принципиальных осложнений не представляет.

Итак, имеем задачу

 (3.17)

Справедлива

**Теорема 3.1.***Пусть в области функция  непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица по у*



(, *L*— *одна и та же постоянная для любой пары точек из R), а функция непрерывна по совокупности аргументов в , где и удовлетворяет условию Липшицапо у и z*



*,  и  — одни и те же постоянные для любой пары точек из D).*

*Тогда при , где существует единственное решение задачи* (3.17).

**Доказательство.** Перейдем от задачи (3.17) к интегральному уравнению

 (3.18)

и построим последовательность приближений

 ,

 (3.19)

Методом индукции нетрудно доказать непрерывность функций  и неравенство 

Оценим . Имеем

 (3.20)

Из (3.19) имеем



Предположим, что для выполнено

 (3.21)

где . Тогда из (3.20) получим



т. е. оценка (3.21) справедлива для номера, на единицу большего.

Итак, неравенство (3.21) справедливо для любого . Отсюда следует равномерная сходимость ряда с  и равномерная сходимость последовательности при ** к некоторой непрерывной функции **, так как



Предельный переход при в равенстве (3.19) дает соотношение (3.18).Отсюда следует дифференцируемость **и обращение в тождество уравнения (3.17).

Доказательство единственности можно провести также одним из традиционных способов. Предположим, что имеются два решения **и **задачи (3.17). Тогда **удовлетворяет неравенству (которое получается так же, как неравенство (3.20))

 (3.22)

Пусть при . Так как , то . Рассмотрим промежуток . Из (3.22) следует, что на этом промежутке либо , либо справедливо неравенство



т. е. , что является противоречием. Следовательно, при . Тогда в неравенстве (3.22) можно заменить  на и, повторив рассуждения, получить, что при . Продолжая процесс, через конечное число шагов получим, что при . Теорема доказана.

**Замечание.** В отличие от линейного случая, разобранного в п. 1, утверждение теоремы 3.1 носит локальный характер, т. е. существование решения гарантируется не на всем заданном промежутке  изменения х, а на некотором достаточно малом отрезке .

Точку , можно принять за новую начальную точку и применить описанные выше построения к задаче

 (3.23)

Тем самым можно доказать существование решения задачи на некотором отрезке , 

Решение задачи (3.23) можно рассматривать как продолжение решения  задачи (3.17) на отрезок .

Продолжая шаг за шагом описанные рассуждения, можно „довести" график решения до границы заданной области , .

### 3.3. ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯС ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА

Обратимся сначала к задаче (3.2), (3.3). Сведем эту задачу к интегральному уравнению, пользуясь способом, уже применявшимся в п. 1 предыдущего параграфа. Рассматривая (3.2) как дифференциальное уравнение с неоднородностью

,

получим

 (3.24)

Меняя порядок интегрирования в первом слагаемом, будем иметь

 (3.25)

где — сумма двух последних слагаемых в (3.24), а ядроопределяется соотношением



Таким образом, задача (3.2), (3.3) свелась к линейному интегральному уравнению типа Фредгольма (3.25), ядро которого, вообще говоря, несимметрично, даже если симметрично. Точно так же, если существует функция Грина оператора  при условиях (3.6), то задача (3.4), (3.6) сводится к интегральному уравнению вида (3.25), где



— решение однородного уравнения  а



Рассмотрим теперь уравнение (3.7). Зададим начальное условие

 (3.26)

(подчеркнем, что в отличие от (3.3) здесь начальное значение является функцией ).

Способ, примененный выше к уравнениям (3.1) и (3.2), в данном случае приводит к интегральному уравнению с двойным интегралом

 (3.27)

где , а



Интегральные уравнения вида (3.27) нами не рассматривались, однако для них можно провести рассуждения, аналогичные приведенным ранее. При этом получим, что решение (3.27) существует, единственно и может быть найдено путем последовательных приближений.

Можно выделить случай, когда решение задачи (3.7), (3.26) удается построить в виде разложения по собственным функциям ядра. Пусть , , , т. е. уравнение имеет вид

 (3.28)

Будем строить решение задачи (3.28), (3.26) при , . Представим в виде

,

где удовлетворяет соотношениям:

 (3.29)

и, следовательно,

 (3.30)

Тогда

 (3.31)

Здесь



Функцию *g(x, t)* будем искать в виде

 (3.32)

где собственные функции ядра . Подставляя (3.32) в (3.31), приравнивая слагаемые при получим

(3.33)

где — коэффициент Фурье функции , т. e. . Дифференциальное уравнение(3.33), решение которого имеет вид

 (3.34)

Для  из (3.30) имеем



где , — коэффициенты Фурье функций  и *f(x)*. Поскольку при 

, 

где С, и С2 — некоторые константы, то . Так как при , то экспоненты, стоящие под знаком интеграла в (3.34), равномерно ограничены по *t* и п. Из (3.34) получаем оценку для :

 (3.35)

В силу этой оценки ряд (3.32) мажорируется рядом

 (3.36)

представляющим собой сумму двух рядов, равномерная сходимость каждого из которых доказывается так же, как в теореме Гильберта — Шмидта. Поэтому ряд (3.32) сходится равномерно относительно *х* и *t* и *g(x, t)* является непрерывной функцией *х* и *t*.

Для того чтобы обосновать проведенные выше преобразования, необходимо убедиться в существовании непрерывной производной и в возможности ее вычисления почленным дифференцированием ряда (3.32). Для этого надо убедить­ся в равномерной сходимости ряда

 (3.37)

Из (3.33) видно, что  имеет такую же оценку (3.35) (может быть, лишь с другой константой С). Поэтому ряд (3.37) также равномерно сходится. Тем самым функция g(x, t), определяемая рядом (3.32), является решением за­дачи (3.31), а следовательно, у(х, t) является решением за­дачи (3.28), (3.26). Таким образом, справедлива

**Теорема 3.2.***Решение задачи* (3.28), (3.26) *дается формулой* (3.29),*в которой функция y(x,t) определяется из* (3.30), *а функция g(x, t) представляется рядом Фурье* (3.32) *по собственным функциям*  *ядра К(х, s). Коэффициенты* *определяются формулой* (3.34), *в которой* *есть коэффициент Фурье функции* *, а*  *— собственное значение ядра К(х, s), отвечающее собственной функции* 

*Полученное решение является единственным, поскольку задача (3.26), (3.28) является частным случаем задачи* (3.7), (3.26), *а решение последней, как было указано выше, единственно.*

### 3.4. Приближенные методы Решения интегральных уравнений

В теории численных методов решения интегральных уравнений рассма­триваются следующие типичные задачи. Найти решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода

(3-38)

интегрального уравнения Фредгольма второго рода

 (3-39)

интегрального уравнения Вольтерра первого рода

(3-40)

интегрального уравнения Вольтерра второго рода

(3-41)

и задачи на собственные значения

(3-42)

В последнем случае ищутся числа , при которых задача (3-42) имеет ненулевое решение.

#### 3.4.1.Решения интегральных уравнений методом замены интеграла квадратурной суммой

Воспользуемся какой-либо формулой численного интегрирования

(3-43)

где *,* вообще говоря, зависят\* от *m*. Имеем равенство

(3-44)

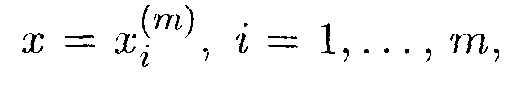
где —остаточный член квадратурной формулы (3-44)

Рассмотрим для примера уравнение Фредгольма второго рода (3-39). Его можно переписать в виде

 (3-45)

остаточный член при вычислении интеграла

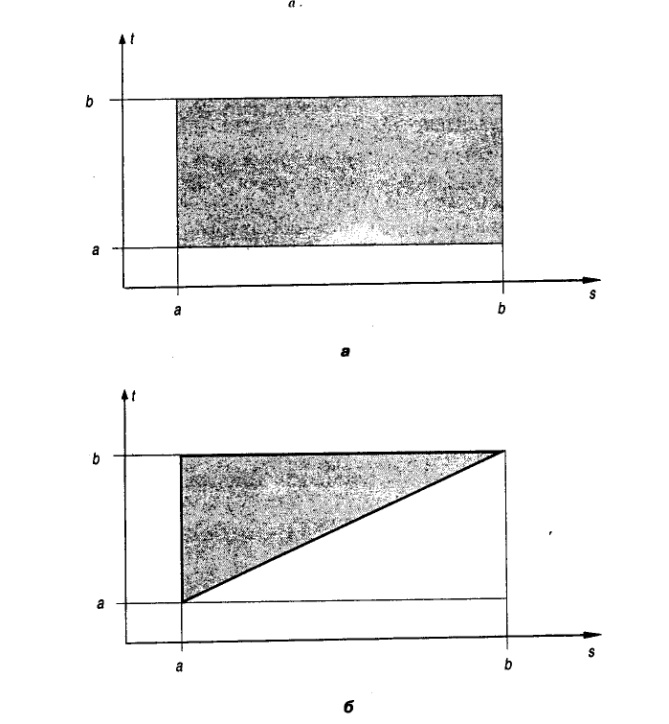
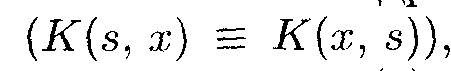
с помощью квадратуры (3-44)является функцией переменной *х.* Полагая в (3-45)



Получимсистему уравнений. Отбрасывая остаточный член, приходим к системе линейных алгебраических уравнений

(3-46)

Для решения этой задачи могут быть применены стандартные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Будем рассматривать случай вещественных Обратимвнимание на следующее обстоятельство. Если ядро *К(х, s)* интегрального оператора *G*симметричното оператор *Е* — *G,* входящий в левую часть исходного уравнения (3-39), также симметричен.

Однако матрица системы уравнений (3-46) не обязательно будет симметричной. Мы видели ранее, что решение систем уравнений с симметричной матрицей в определенном смысле предпочтительнее решения системы уравнений с несимметричной матрицей: шире класс точных и итерационных методов, которые могут быть применены для решения таких систем.

Рис.3.1. Области задания ядер для интегральных уравнений а) Фредгольма, б) Вольтерра.

#### 3.4.2 Приближенные решение интегральных уравнений посредством замены ядра вырожденным

Пусть имеем интегральное уравнение

(3-47)

с произвольным ядром Простота разыскания решения уравнения с вырожденным ядром, естественно, приводит к мысли о замене данного произвольного ядра приближенно на вырожденноеи принятии решения

(3-48)

в качестве приближения к решению исходного уравнения. В качестве вырожденного ядра , близкого к данному можно брать отрезок ряда Тейлора для функции , отрезок ряда Фурье дляпо любой полной ортонормированной в системе функций и т.д. Укажем некоторые оценки погрешностей в решении (1), возникающие от замены данного ядра на вырожденное. Пусть даны два ядра и и известно, что

и что резольвентаравнения с ядром

а так же что . Тогда если выполнено условие

Уравнение

имеет единственное решение и разность между этим решением и решением уравнения

не превосходит

где *N* – верхняя граница . Отметим, что для вырожденного ядра резольвента находится просто (с точностью до вычисления интегралов), именно,

Если , то полагая

получаем

где

корни D(суть собственные значения ядра

Приведем еще одну оценку . Пусть

Где – вырожденное ядро, а имеет малую норму в метрике. Пусть, далее, , суть резольвенты ядер исоответственно и ,, –нормы операторов с соответствующими ядрами. Тогда

(3-49)

Причем норма в формуле (3-49) может быть взята в любом функциональном пространстве. Для нормы резольвенты R любого ядра справедлива оценка

(3-50)

При этом в пространстве *С(0, 1)*непрерывных функций на отрезке [0, 1]

В пространстве функций, суммируемых с квадратом по a<x, t<b},

**Пример**. Решить уравнение

заменяя его ядро на вырожденное.

**Решение**. Разлагая в ряд ядро получим

Возьмем в качестве вырожденного ядра первые три члена разложения

и будем решать новое уравнение

Проинтегрируем по *t* и получим

(3-51)

где

Подставляя (3-51) в интегральное уравнение получим систему для определенияи

Имеем:

Решая эту систему, найдем

И следовательно приближенное решение можно записать в виде

Точное решение

Оценим теперь || || по формуле

В метрике пространства получим

Нормы резольвент и оценим по формулам

Где | значит, , а тогда

Найти решение интегрального уравнения с помощью замены ядра вырожденным и дать оценку погрешности:

1.

2.

3.

4.

#### 3.4.3.Метод последовательных приближений.

Метод последовательных (метод итераций) состоит в следующем. Для интегрального уравнения

Строим последовательность функцийс помощью рекуррентной формулы

(3-52)

Функции рассматриваются как приближения к искомому решению уравнения, причем нулевое приближение может быть выбрано произвольно. При выполнении условий

последовательность (3-52) сходится к решению интегрального уравнения. Величина погрешности (*m + 1*)-го приближения определяется неравенством

Где

Методом последовательных приближений решить уравнения:

1.

2.

3. Найти третье приближение к решению интегрального уравнения

где

и оценить погрешность. Отметим, что основная трудность применения метода последовательных приближений состоит в вычислении квадратур. Его, как правило, приходится производить при помощи формул приближенного интегрирования. Поэтому и здесь целесообразно заменить данное ядро вырожденным с помощью тейлоровского разложения, а затем уже ввести метод итераций.

#### 3.4.4. Метод Бубнова – Галеркина.

Приближенное решение интегрального уравнения

по методу Бубнова – Галеркина ищется так. Выбираем систему функцийполную в и такую, что при любом *n*функции , … линейно независимы, и ищем приближенное решение в виде (2)

Коэффициенты (k = 1, 2, … , n) определяются из следующей линейной системы:

(*k = 1,2,…n*)

Гдеозначает скалярное произведение функций и вместо надо подставить

Если значение не является характеристическим, то при достаточно больших n система однозначно разрешима и приближенное решение стремится в метрике крешению исходного уравнения

Пример:

Методом Бубнова – Галеркина решить уравнение

Решение. В качестве полной системы функций на (-1, 1) выбираем систему полиномов Лежандра

Приближенное решение

Подставляя вместо в уравнение, получим

Или после интегрирования по*t*

Умножая обе части (5) последовательно на 1, x, и интегрируя по x в пределах от -1 до 1, найдем:

Отсюда , и значит . Нетрудно проверить, что это – точное решение уравнения.

Методом Бубнова – Галеркина решить следующие интегральные уравнения:

1.

2.

3.

Замечание. Для вырожденных ядер метод Бубнова – Галеркина дает точное решение, а для общего случая он эквивалентен замене ядра на вырожденное

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М: БИНОМ, 2004. – 636с.
2. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. М.: Наука, 1993. – 496с.
3. Калитин Н.Н. Численные методы. – М : Наука, 1978. – 61с.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М : Наука, 1976. – 632с.
5. Демидович В.П. и др. Численные методы анализа. –М: Физматгиз, 1963. – 400с.
6. Волков Е.А. Численные методы. – М: Наука, 1982. – 255с.
7. Крылов В.И. и др. Вычислительные методы высшей математики. Т.1. - Мн : Выш шк., 1972. – 684с.
8. Крылов В.И. и др. Вычислительные методы высшей математики. Т.2. – Мн : Выш. шк., 1976. – 672с.
9. Форсайт Дж. и др. Машинные методы математических вычислений. – М : Мир, 1980. – 280с.
10. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. – М: Мир, 1982. – 238с.
11. Сборник задач по методам вычислений / Под ред. Монастырного П.И. – М: Наука, 1994. – 318с.
12. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М: Наука, 1987. – 288с.
13. Березин И.С. , Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1. - М: Фитматгиз, 1962. – 464.

# 2. Практическийраздел

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ, ИХ ХАРАКТЕРИСТИКА

По результатам работы студентом должен быть представлен и защищен отчет. Содержание отчета включает:

1. Введение, содержащее постановку задачи, обзор имеющихся методов ее решения, их сравнительная характеристика.
2. Детальное описание и схема алгоритма выбранного метода.
3. Распечатку программы ( каждый метод должен быть реализован в виде отдельной подпрограммы, в головной программе предусмотреть ввод исходных данных и обращение к подпрограмме), таблицы полеченных результатов, графики сходимости приближенного решения к точному.
4. Анализ полученных результатов, включающий аналитическую оценку точности метода и ее сравнение с численно полученными результатами (т.е. оценку разности между точным и приближенным решением при различных параметрах метода).

### ИПР №1. Решение краевых задач методом разностных аппроксимаций.

#### Цель выполнения задания:

* изучить метод **разностных аппроксимаций,**

составить алгоритм метода и программу их реализации, получить численное решение заданной **краевой задачи**;

* составить алгоритм решения **краевых задач** указанными методами, применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
* составить программу решения **краевых задач** по разработанному алгоритму;
* выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.

#### Краткие теоретические сведения.

Разностный метод решения краевых задач.

Рассмотрим краевую задачу



Разобьем отрезок *[a, b]* на *n* одинаковых частей с шагом  точками:

.

Заменим



где .

Получаем для любого внутреннего узла ,  уравнение



и для граничных узлов

.

То есть мы имеем систему из *(n+1)* уравнений с *(n+1)* неизвестными . Ее решение дает нам приближенное решение краевой задачи.

Рассмотрим частный случай линейной краевой задачи:

,

.

В этом случае получаем



.

То есть получили трехдиагональную систему линейных уравнений

,

в которой выполнено условие преобладания диагональных элементов

.

Такая система легко решается методом прогонки.

#### ЗАДАНИЕ. Составить разностную схему и получить численное решение краевой задачи с точностью 10-3

**



Исходные данные:

,

где k номер варианта.

### ИПР №2. Решение задачи теплопроводности методом разностных аппроксимаций

**Отчет** по **ИПР** должен содержать следующие материалы по каждой задаче:

1) постановка задачи;

2) необходимый теоретический материал;

3) **тестовый** пример и результаты вычислительного эксперимента по тесту (если необходимо);

4) полученные результаты и их анализ;

5) графический материал (если необходимо);

6) тексты программ.

Варианты заданий к заданиям 2.1-2.6 даны в *ПРИЛОЖЕНИИ 2.A.*

Фрагмент решения задачи 2.1 дан в *ПРИЛОЖЕНИИ 2.B.*

#### Цель выполнения задания:

* изучить метод **разностных аппроксимаций для уравнения теплопроводности,**
* составить алгоритмы решения **уравнения теплопроводности** методом сеток применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
* составить программы решения **уравнения теплопроводности** по разработанным алгоритмам;
* выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.
* получить численное решение заданной **уравнения теплопроводности**

#### Краткие теоретические сведения.

Требуется найти непрерывную на замкнутом пря­моугольнике *u*(*x, t*), которая на  удовлетворяет уравнению теплопроводности

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (1) |

при *t*= 0 удовлетворяет начальному условию

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *u*(*x*, 0) *= s*(*x*), | (2) |

а при *х* = 0 и *х* = 1 подчиняется краевым условиям

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *u*(0, *t*) *= p*(*t*), *u*(1, *t*) *= q*(*t*), | (3) |

где *f*(*x*, *t*), *s*(*x*), *p*(*t*), *q*(*t*) — заданные достаточно гладкие функции, причем *s*(0) = *p*(0), *s*(l) = *q*(0).

Задача (1) — (3) называется *смешанной*, поскольку она содержит как *начальноеусловие*, так и *краевыеусловия*. Известно, что у поставленной задачи сущестует единственное решение *u*(*х*, *t*). Мы будем предполагать, что это решение имеет на замкнутом прямоугольнике  непрерывные частные производные , , , .

Зададим для сеточных функции определенных на  или на , следующие нормы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , . | (4) |
|  | , , | (14) |

1. Вычислительные алгоритмы. Разрешив разностное уравнение (8) относительно , получим

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | =+++. | (18) |

Поскольку , *k*= 1, 2, . . . , *N*-l, = 0, 1, . . . , *M*, известны (они задаются на  условием (9)), решение разностной схемы (8), (9) находится по формуле (18) явно, слой за слоем. Разностная схема (8), (9) называется поэтому *явной*.

Разностное уравнение (3) с учетом (5) может быть записано в виде

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | -+= . | (19) |

Согласно (6), (7), (11) имеем также

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (20) |

Таким образом, если , *k*= 1, 2, . . . , *N*-l, известны (в частности, , *k*= 1, 2, . . . , *N*-l, заданы условием (11)), то для нахождения решения разностной схемы (3), (11) на следующем -м слое нужно решить трехточечное разностное уравнение (19) с краевыми условиями первого рода (20), т. е. разностную краевую задачу вида (22.1), (22.2). Поэтому разностная схема (3), (11) называется *неявной*.

1. Для нахождения разностного решения на -м слое может быть применен метод прогонки, поскольку для задачи (19), (20) условия (22.3) выполнены (проверьте, положив *k* = *j,*, , =). При этом число выполняемых арифметических действии для нахождения разностного решения на одном слое согласно (22.11) имеет величину *O*(*N)*, т. е. по порядку относительно *N* не больше, чем при применении явной формулы (18) для схемы (8), (9).

Устойчивость и сходимость. Так как дополнительные условия (2), (3) аппроксимируются в разностных схемах (8), (9) и (3), (11) на сетке  точно, то нам будет достаточно исследовать устойчивость только по правой части. Остановимся сначала на разностной схеме (8), (9). Для исследования ее устойчивости по правой части нужно рассмотреть решение *z*вспомогательной разностной задачи

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | =, | (21) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (22) |

где  — произвольная заданная на  сеточная функция. Разрешив разностное уравнение (21) относительно , аналогично (18) получаем

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | =+++, | (23) |

*k*=1, 2, . . . , *N*-l, =1, 2, . . . , *M*.

Кроме того, в соответствии с (22) имеем

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , *k* = 1, 2, . . . , *N*-l;  , = 0, 1, . . . , *M*. | (24) |

Предположим, что  и *h* удовлетворяют следующему условию:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | (25) |

Тогда, очевидно,

+.

Отсюда и из (23), (24) вытекает неравенство

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | +, | (26) |

и поскольку =0, то

.

Следовательно,

1. ==*T*

или, окончательно,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *T* | (27) |

1. Полученное неравенство (27) для решения задачи (21), (22), в котором постоянная *T*не зависит от *h* и , а также от функции , и означает устойчивость разностной схемы (8), (9) по правой части при условии (25). Можно доказать, что нарушение условия (25) может привести к нарушению устойчивости разностной схемы (8), (9). В частности, если *h*0, 0, const > 1/2, то разностная схема (8), (9) неустойчива.

При этом в случае явной схемы (8), (9) предполагается выполнение ограничения (25).

Определение. Разностная схема, устойчивая при любом соотношении шагов  и *h*, называется *абсолютнаустойчивой*, а устойчивая при ограничениях на и *h* — *условноустойчивой*.

Недостатком разностной схемы (8), (9) является ее условная устойчивость (ограничение (25) является жестким для шага  по времени). Преимущество — простота счета по явной формуле (18) и возможность распространения на задачу Коши (когда условие (2) задано на всей оси *х*, а краевые условия (3) отсутствуют). В случае смешанной задачи (1) — (3) предпочтение отдают неявной абсолютно устойчивой разностной схеме (3), (11). Разностная краевая задача (19), (20) при переходе на каждый следующий слой решается методом прогонки весьма эффективно.

**Тестовый пример**

Решим задачу для уравнения теплопроводности с начальным условием 

и граничными условиями 



при , . То есть полагая .

Выберем , тогда , а , тогда

 ; .

Последовательно заполняем таблицу для данных нашей задачи.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| j | i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| x  t | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 |
| I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | 0 | 2.0 | 2.2 | 2.4 | 2.6 | 2.8 | 3.0 |
| 1 | 0.02 | 2.02 | 2.2 | 2.4 | 2.6 | 2.8 | 3.04 |
| 2 | 0.04 | 2.04 | 2.21 | 2.4 | 2.6 | 2.82 | 3.08 |
| 3 | 0.06 | 2.06 | 2.22 | 2.405 | 2.61 | 2.84 | 3.12 |
| 4 | 0.08 | 2.08 | 2.2325 | 2.415 | 2.6225 | 2.865 | 3.16 |
| 5 | 0.3 | 2.3 | 2.2475 | 2.4275 | 2.64 | 2.8912 | 3.20 |
| 6 | 0.12 | 2.12 | 2.2637 | 2.4437 | 2.6593 | 2.92 | 3.24 |
| 7 | 0.14 | 2.14 | 2.2818 | 2.4615 | 2.6818 | 2.9496 | 3.28 |
| 8 | 0.16 | 2.16 | 2.3007 | 2.4818 | 2.7055 | 2.9809 | 3.32 |
| 9 | 0.18 | 2.18 | 2.3209 | 2.5031 | 2.7313 | 3.0127 | 3.36 |
| 3 | 0.20 | 2.20 | 2.3415 | 2.5261 | 2.7579 | 3.0456 | 3.40 |

#### ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ №2. Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи - коэффициента теплопроводности *k(x)* и начальной температуры :



**ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ**

1. Найти приближенное решение задачи с шагами  и *h*=0.01, используя

явную разностную схему. Построить графики решений при значениях

*t*= 0.5, 20, 200.

2. Используя результаты экспериментально определить момент времени *t*, при котором происходит установление процесса (визуально).

3. Исследовать, как влияет начальная температура на процесс установления, взяв другие функции  (согласованные с граничными условиями).

#### *ПРИЛОЖЕНИЕ 2.A Схема вариантов к* ИПР*2*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | Выполняемые задачи | N | Выполняемые задачи | N | Выполняемые задачи |
| 1 | 2.1.1,2.2.1, 2.4.1,2.5.1, 2.6.1 | 11 | 2.1.11,2.2.6, 2.4.11,2.5.11, 2.6.11 | 21 | 2.1.21,2.2.11, 2.4.21,2.5.21, 2.6.21 |
| 2 | 2.1.2,2.3.1,2.4.2,2.5.2, 2.6.2 | 12 | 2.1.12,2.3.6, 2.4.12,2.5.12, 2.6.12 | 22 | 2.1.22,2.3.12,2.4.22,2.5.22, 2.6.22 |
| 3 | 2.1.3,2.2.2, 2.4.3,2.5.3, 2.6.3 | 13 | 2.1.13,2.2.7,2.4.13,2.5.13, 2.6.13 | 23 | 2.1.23,2.2.12, 2.4.23,2.5.23, 2.6.23 |
| 4 | 2.1.4,2.3.2, 2.4.4,2.5.4, 2.6.4 | 14 | 2.1.14,2.3.7, 2.4.14,2.5.14, 2.6.14 | 24 | 2.1.24,2.3.12, 2.4.24,2.5.24, 2.6.24 |
| 5 | 2.1.5,2.2.3, 2.4.5,2.5.5, 2.6.5 | 15 | 2.1.15,2.2.8, 2.4.15,2.5.15, 2.6.15 | 25 | 2.1.25,2.2.13, 2.4.25,2.5.25, 2.6.25 |
| 6 | 2.1.6,2.3.3, 2.4.6,2.5.6, 2.6.6 | 16 | 2.116,2.3.8, 2.4.16,2.5.16, 2.6.16 | 26 | 2.1.26,2.3.13,2.4.26,2.5.26, 2.6.26 |
| 7 | 2.1.7,2.2.4, 2.4.7,2.5.7, 2.6.7 | 17 | 2.1.17,2.2.9, 2.4.17,2.5.17, 2.6.17 | 27 | 2.1.27,2.2.14, 2.4.27,2.5.27, 2.6.27 |
| 8 | 2.1.8,2.3.4, 2.4.8,2.5.8, 2.6.8 | 18 | 2.1.18,2.3.9,2.4.18,2.5.18, 2.6.18 | 28 | 2.1.28,2.3.14, 2.4.28,2.5.28, 2.6.28 |
| 9 | 2.1.9,2.2.5, 2.4.9,2.5.9, 2.6.9 | 19 | 2.1.19,2.2.2, 2.4.19,2.5.19, 2.6.19 | 29 | 2.12.9,2.2.15, 2.4.29,2.5.29, 2.6.29 |
| 2 | 2.1.2,2.3.5,2.4.2, 2.5.2, 2.6.2 | 20 | 2.1.20,2.3.2,2.4.20,2.5.20, 2.6.20 | 30 | 2.1.30, 2.3.15,2.4.30,2.5.30, 2.6.30 |

#### Таблица к задаче

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | *k(x)* | *f(x)* | *a* | *UA* | *b* | *UB* |
| 2.1.1 |  |  | 1 | 3 | 2 | 0 |
| 2.1.2 |  |  | 0.5 | 0 | 1.5 | 5 |
| 2.1.3 |  |  | 0.5 | 2 | 1.5 | 6 |
| 2.1.4 |  |  | 0.2 | 4 | 1.2 | 1 |
| 2.1.5 |  | +2 | 0.1 | 2 | 1.1 | 4 |
| 2.1.6 |  |  | 0.5 | 1 | 1.5 | 5 |
| 2.1.7 |  |  | 1 | 3 | 2 | 3 |
| 2.1.8 |  |  | 0.1 | 6 | 0.8 | 0.6 |
| 2.1.9 |  |  | 0.1 | 3 | 0.8 | 1 |
| 2.1.2 |  |  | 0.1 | 1 | 0.6 | 5 |
| 2.1.11 |  |  | 1 | 2 | 1.5 | 1 |
| 2.1.12 |  |  | 1 | 3 | 2 | 3 |
| 2.1.13 |  |  | 1 | -2 | 2.2 | 2 |
| 2.1.14 |  |  | 1 | 2 | 2.5 | -2 |
| 2.1.15 |  |  | 1.5 | 3 | 2.5 | -3 |
| 2.1.16 |  |  | 0.1 | 3 | 1.1 | 0 |
| 2.1.17 |  |  | 1.5 | -2 | 2.5 | -4 |
| 2.1.18 |  |  | 0.5 | 2 | 1.6 | 6 |
| 2.1.19 |  |  | 0.2 | 4 | 1.2 | 1 |
| 2.1.20 |  |  | 1.5 | -1 | 2.5 | 4 |
| 2.1.21 |  |  | 0.3 | -1 | 2.3 | 1 |
| 2.1.22 |  |  | 1 | 3 | 2 | 3 |
| 2.1.23 |  |  | 0.5 | 1 | 1.5 | 1 |
| 2.1.24 |  |  | 0.5 | 2 | 1.3 | 2 |
| 2.1.25 |  |  | 0.2 | -1 | 1.2 | -1 |
| 2.1.26 |  |  | 0.3 | 3 | 2.3 | 1 |
| 2.1.27 |  |  | 2 | -4 | 3 | 2 |
| 2.1.28 |  |  | 1.2 | -4 | 2.4 | 1 |
| 2.1.29 |  |  | 0.5 | 1 | 1.5 | 1 |
| 2.1.30 |  |  | 0.3 | 3 | 2.3 | 1 |

#### Таблица к задаче

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0.05 | 0 | 0 | 0 | *x* |
| 2 | -1 | 1 | 0.5 | 0.4 |  | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0.1 | 0.5 | *x* (1*-x*) | 5*t* | 5*t* | 0 |
| 4 | 0 | 2 | 1 | 0.2 | 0 | 0 | 0 | *x* |
| 5 | 0 | 1 | 0.1 | 0.5 | *x* |  |  | 0 |
| 6 | -1 | 1 | 2 | 0.1 |  | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 2 | 0.02 | 0 | 0 |  | *x* (1*-x*) |
| 8 | -1 | 1 | 0.5 | 0.4 |  | 0 | 0 | *x* |
| 9 | 0 | 1 | 0.1 | 0.5 |  | 0 | 1 | *t* |
| 3 | -1 | 1 | 0.2 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 11 | 0 | 1 | 1 | 0.05 |  | 0.5 | 0.5 | 0 |
| 12 | -1 | 1 | 0.5 | 0.4 |  | 1 | 1 | *x* |
| 13 | 0 | 1 | 0.2 | 0.25 |  | 0 |  |  |
| 14 | 0 | 2 | 1 | 0.2 |  | 0 |  |  |
| 15 | 0 | 1 | 1 | 0.05 | 1 |  |  | 0 |
| 16 | 0 | 2 | 1 | 0.2 | 1 |  |  | 0 |
| 17 | 0 | 1 | 0.5 | 0.1 | 1 |  |  | 2 |
| 18 | 0 | 2 | 0.5 | 0.4 | 1 |  |  | 2 |
| 19 | 0 | 1 | 0.2 | 0.2 |  | 1 | 0 | 0 |
| 20 | 0 | 2 | 2 | 0.1 | 0 | 0 | 3*t* | 1 |
| 21 | 0 | 1 | 0.5 | 0.1 | 0 | 0 | 3*t* | *t* |
| 22 | 0 | 2 | 1 | 0.2 | 1 |  |  | 1 |
| 23 | 0 | 1 | 0.4 | 0.1 | *x* | 0 | 1 | 1 |
| 24 | -1 | 1 | 1 | 0.2 |  | 0 | 5*t* | 0 |
| 25 | 0 | 1 | 0.4 | 0.1 |  | 1 | 0 | 2 |
| 26 | 0 | 2 | 1 | 0.2 | *x* | 0 | 2 | *x* |
| 27 | 0 | 1 | 0.25 | 0.2 |  | 0 | 1 | 5 |
| 28 | 0 | 2 | 1 | 0.2 | *x* | 0 | 2 | *x* |
| 29 | 0 | 1 | 0.5 | 0.1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| 30 | -1 | 1 | 0.2 | 1 | 1- | 0 | 0 | 1 |

#### *ПРИЛОЖЕНИЕ 2.B*

Для нахождения решения стационарного уравнения теплопроводности дважды проинтегрируем его. Первое интегрирование дает такой результат



.

Проинтегрируем полученное соотношение еще раз получим:

.

Константы  находятся из граничных условий:

, .

Пример решения задачи

Пусть .

,

, .

Проинтегрируем уравнение: . Повторное интегрирование дает соотношение: .

Найдем константы  и , при условии, что : ;, поэтому .

Окончательно, решение примет вид: .

Для проверки можно подставить найденное решение в исходное уравнение и проверить выполнение граничных условий.

## КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

### УКАЗАНИЯ ПО ВЫБОРУ ВАРИАНТА

Все задачи должны быть решены как аналитически, так и с помощью указанной интегрированной системы.

Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради, оставив в ней поля для замечаний преподавателя – рецензента. На обложке тетради должны быть указаны: дисциплина, номер контрольной работы, шифр, курс, фамилия, имя, отчество студента.

Работу необходимо выполнять аккуратно, любыми чернилами, кроме красных. При выполнении контрольной работы обязательно должны быть даны подробные вычисления и четкие пояснения к решению задач. Решения на ПЭВМ должны сопровождаться указаниями действий с клавиатурой ПЭВМ. В каждой задаче должен быть ответ. В конце работы студент ставит дату выполнения и свою подпись.

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1 Решение краевых задач. Методы коллокаций, наименьших квадратов и Галеркина.

#### Цель выполнения задания:

* изучить методы **коллокаций, наименьших квадратов и Галеркина,**

составить алгоритмы методов и программы их реализаций, получить численное решение заданной **краевой задачи**;

* составить алгоритм решения **краевых задач** указанными методами, применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
* составить программу решения **краевых задач** по разработанным алгоритмам;
* выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.

#### Краткие теоретические сведения.

Будем рассматривать дифференциальное уравнение второго порядка.

,

где , ,  − заданные непрерывные на отрезке *[a, b]* функции.

Напомним, что задача Коши для уравнения сводится к нахождению решения , удовлетворяющего начальным условиям:



*Краевой задачей* называется задача нахождения решения , удовлетворяющего граничным условиям:



Краевая задача отличается от задачи Коши непредсказуемостью. Ее решение может существовать, не существовать, быть единственным, может быть бесконечно много решений.

Часто вместо граничных условий используют обобщенные граничные условия:



Граничные условия называются *однородными,* если A=B=0.

Соответственно, краевая задача называется *однородной,* если у нее однородные граничные условия и правая часть уравнения .

Следующая теорема имеет важное теоретическое значение.

**Теорема.** Краевая задача имеет решение, причем единственное тогда и только тогда, когда соответствующая ей однородная краевая имеет только нулевое решение (тривиальное решение однородной краевой задачи).

#### Способы решения краевой задачи.

Поскольку достаточно хороших аналитических методов нет, то используются приближенные методы.

Система дважды непрерывно дифференцируемых функций  называется *базисной системой*, если выполняется:

1)  удовлетворяет граничному условию,

2) функции  − линейно независимы на *[a, b]* и удовлетворяют однородным граничным условиям.

Тогда по базисным функциям строят приближенное решение в виде линейной комбинации базисных функций:

.

Задача сводится к выбору коэффициентов  таких, чтобы функция

*yn(x)* удовлетворяла граничному условию и была в некотором смысле близкой к точному решению.

Поступают следующим образом. Выражение

 называют невязкой.

Легко видеть, что, если бы , то *yn(x)* было бы точным решением. К сожалению, так бывает очень редко. Следовательно, необходимо выбрать коэффициенты таким образом, чтобы невязка была в некотором смысле минимальной.

##### 1.Метод коллокаций.

На отрезке *[a, b]* выбираются точки, которые называются точками коллокации. Точки коллокации последовательно подставляются в невязку. Считая, что невязка должна быть равна нулю в точках коллокации, в итоге получаем систему уравнений для определения коэффициентов .



Обычно *m=n*. Получается система из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными (коэффициентами ):



Решая эту систему найдем приближенное решение *yn(x).* Для повышения точности расширяем систему базисных функций. В значительной степени успех в применении метода зависит от удачного выбора базисной системы.

###### Тестовый пример1. Пусть

*,*

*, .*

*Выберем базисную систему:*

**

*Поскольку , следовательно, функции  и  линейно независимы.*

*Строим приближенное решение*

*.*

*Выберем точки коллокации:*

*.*

*Получаем систему уравнений*

**

*Решая ее, получим*

*.*

##### 2.Метод наименьших квадратов.

**Интегральный МНК.** Как и в методе коллокаций приближенное решение строится по базисной системе. Для нахождения коэффициентов при базисных функциях минимизируется интеграл от квадрата невязки

.

Для нахождения минимума интеграла вычисляем первые производные от интеграла по параметрам и приравнивая их нулю строим систему нормальных уравнений



Решая ее, находим .

**Дискретный МНК.**  Выбирают *N>n* точек и решают задачу

.

Для ее решения строится система



*Тестовый пример2.*

*Рассмотрим краевую задачу*

**

**

*Выберем базисную систему:*

**

*Применяя метод наименьших квадратов, можно найти*

**

##### 3.Метод Галеркина.

По базисной системе строим приближенное решение

.

Рассматриваем невязку  и для определения коэффициентов при базисных функциях строим систему



Решая данную систему, находим значение .

*Тестовый пример3.*

*Рассмотрим краевую задачу*

**

*.*

*Возьмем*

**

*Тогда, применяя метод Галеркина, получим*

**

**

Сравним значения точного решения  со значениями приближенных решений  и  в отдельных точках.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| xi |  |  |  |
| 0,25  0,5  0,75 | 0,044  0,07  0,06 | 0,052  0,069  0,052 | 0,044  0,062  0,06 |

#### ЗАДАНИЕ. Методами коллокаций, интегральным и дискретным методами наименьших квадратов и Галеркина получить численное решение краевой задачи

**



Исходные данные:

,где k номер варианта. Базисную систему выбрать в виде:

**

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2 Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

#### Цель выполнения задания:

* изучить метод **разностных аппроксимаций для уравнения** Пуассона**,**
* составить алгоритмы решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом сеток применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
* составить программы решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона по разработанным алгоритмам;
* выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.
* получить численное решение заданной задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

#### Краткие теоретические сведения.

Пусть D = {(x, у): 0 < х < 1, 0 <y< 1} — открытый квадрат, Г — его граница, =  — замкнутый квадрат, f (х, у) — заданная на  достаточно гладкая функция.

Задача Дирихле состоит в следующем. Требуется найти непрерывную на  функцию u (х, у), удовлетво­ряющую на открытом квадрате D уравнению Пуассона

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | = f(x, y) | (1) |

и обращающуюся на границе квадрата в нуль, т. е.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | u = 0 на Г. | (2) |

Задача Дирихле (1), (2) имеет единственное реше­ние u (х, у).

Положим h = l/N, = kh, = mh, . Построим сетки

={: k, m = 0, 1, . . . , N },

={: k, m = 1, 2, . . . , N-1},

=\ ( — множество узлов, лежащих на Г).

Зададим нормы

, .

Разностная схема:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , k, m = 1, 2, . . . , N-1, | (3) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | на , | (4) |

Разностное уравнение (3) в более подробной записи имеет вид

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | (3\*) |

Решение  разностной задачи Дирихле (3), (4) находится методом последовательных приближений по схеме пе­ременных направлений, (33.9), где ,  —

произвольные. Можно доказать, что

, k, m = 1, 2, . . . , N-1,

при любых начальных приближениях , причем наи­большая скорость сходимости достигается

при . Здесь положена в основу идея о стабилизации при t  решения уравнения теплопроводности к решению уравнения Пуассона, если f не зависит от t.

Разностная схема (3), (4) устойчива по правой части, т. е. разностная задача

=, k, m = 1, 2, . . . , N-1,

= 0 на 

при любом h = 1/N, N2, имеет единственное реше­ние z, и это решение удовлетворяет неравенству

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (5) |

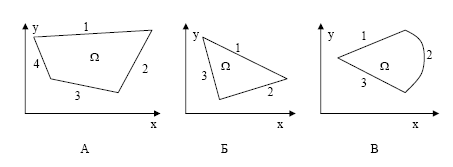
где с — некоторая постоянная, не зависящая от h и сеточной функции .

Если решение задачи Дирихле (9), (10) u(х, у), то справедлива оценка

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (14) |

где  — множество всех узлов, обозначенных кружками и треугольниками. Решение u(х, у) принадлежит классу , например, если граница Г обладает трижды непрерывно дифференцируемой кривизной, функция  длины s дуги границы Г имеет ограниченную пятую производную, а .

#### Задание. Решить двухмерное стационарное уравнение Пуассона

1. 
2. Область Ω представляет собой либо четырехугольник (А), либо треугольник (Б), либо сектор (В).
3. 
4. Участки границы Гi обозначим номерами 1,2,3,4. На границах Гi заданы следующие условия:
5. 
6. Требуется в соответствии с выбранным вариантом,
7. 1) Построить область, задав ее координатами вершин (выбрать самостоятельно).
8. 2) Решить уравнение, используя последовательность сгущающихся сеток (три раза), проанализировать сходимость метода и погрешность решения.

**Варианты заданий**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Ω | g(x,y) | f(x,y) | q1  α1  β1 | q2  α2  β2 | q3  α3  β3 | q4  α4  β4 |
| 1 | А | 1+x+y | x2+y2 | 0  1  1 | 0  1  1 | 1  0.5  0.8 | 1  0  -0.5 |
| 2 | Б | 1+x+y | x2+y2 | 0  1  1 | 0  1  1 | 1  0.5  0.8 | - |
| 3 | В | 1+x+y | x2+y2 | 0  1  1 | 0  1  1 | 1  0.5  0.8 | - |
| 4 | А | 1+sin2(x+y) | x-y | 0  1  2 | 0  1  2 | 1  -0.2  -0.6 | 1  0  0.5 |
| 5 | Б | 1+sin2(x+y) | x-y | 0  1  2 | 0  1  2 | 1  -0.2  -0.6 | - |
| 6 | В | 1+sin2(x+y) | x-y | 0  1  2 | 0  1  2 | 1  -0.2  -0.6 | - |
| 7 | А | 1+0.5cos(x+y) | x+y | 0  1  3 | 0  1  3 | 1  0.5  0.2 | 1  0  -0.8 |
| 8 | Б | 1+0.5cos(x+y) | x+y | 0  1  3 | 0  1  3 | 1  0.5  0.2 | - |
| 9 | В | 1+0.5cos(x+y) | x+y | 0  1  3 | 0  1  3 | 1  0.5  0.2 | - |
| 10 | А | exp(-(x-xc)2) | sin(x+y) | 0  1  -1 | 0  1  -1 | 1  0.5  0.8 | 1  0  0.2 |
| 11 | Б | exp(-(x-xc)2) | sin(x+y) | 0  1  -1 | 0  1  -1 | 1  0.5  0.8 | - |
| 12 | В | exp(-(x-xc)2) | sin(x+y) | 0  1  -1 | 0  1  -1 | 1  0.5  0.8 | - |
| 13 | А | 1+0.5cos(x+y) | exp(-(y-yc)2) | 0  1  -2 | 0  1  -2 | 1  -0.5  -0.8 | 1  0  -0.2 |